GEOMETRIA DIFFERENZIALE 2021/22
ESERCIZI BISETTIMANALI

È sempre lecito e consigliato svolgere gli esercizi a gruppi, purché alla fine ci sia una elaborazione e una scrittura totalmente individuale, e il lavoro di gruppo sia reso esplicito (basta aggiungere "ho fatto gli esercizi in collaborazione con XXX" nel testo). Si raccomanda di scrivere gli esercizi con cura: esercizi scritti in modo non chiaro non verranno corretti.

1. Esercizi del 2 ottobre

Esercizio 1.1. Siano X e Y due spazi topologici. La topologica prodotto su $X \times Y$ è definita nel modo seguente: un sottoinsieme $A \subset X \times Y$ è aperto se e solo se è unione arbitraria di sottoinsiemi $U \times V$ dove $U \subset X$ e $V \subset Y$ sono entrambi aperti. Mostra che questa è veramente una topologia su $X \times Y$.

Esercizio 1.2. Sia $f : X \to Y$ una funzione suriettiva da uno spazio topologico X su un insieme Y. La topologia quoziente su Y è definita nel modo seguente: un sottoinsieme $A \subset Y$ è aperto se e solo se la sua controimmagine $f^{-1}(A)$ è aperta. Mostra che questa è veramente una topologia su X.

Esercizio 1.3. Sia $f : X \to Y$ una funzione fra spazi topologici. Mostra che f è continua se e solo se vale il fatto seguente: per ogni $x \in X$ e per ogni intorno A di $f(x)$, la controimmagine $f^{-1}(A)$ è un intorno di x.

Esercizio 1.4. Sia K uno spazio topologico compatto. Sia $C \subset K$ un sottoinsieme chiuso. Mostra che C è compatto.

Esercizio 1.5. Mostra che il segmento $[0, 1]$ è connesso, usando solo la definizione di connesso (e nessun altro teorema: di solito questo fatto si mostra subito dopo la definizione).

Esercizio 1.6. Mostra che il sottoinsieme seguente in $\mathbb{R}^2$ è connesso ma non connesso per archi:

$$X = \big\{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\big\} \bigcup \big\{\big(x, \sin \tfrac{1}{x}\big) \mid x > 0\big\}.$$

Esercizio 1.7. Scrivi le funzioni di transizione di uno dei due atlanti che abbiamo scelto per S^n e vertifica che sono lisce.

Esercizio 1.8. Mostra che la mappa

$$f : S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n, \qquad (x_1, \ldots, x_{n+1}) \longmapsto [x_1, \ldots, x_{n+1}]$$

è liscia.

Un *diffeomorfismo* è una mappa liscia $f : M \to N$ fra varietà lisce che ha una inversa, anch'essa liscia.

Esercizio 1.9. Costruisci due atlanti *non* compatibili per la varietà topologica $\mathbb{R}$. Mostra che però le due varietà lisce risultanti sono comunque diffeomorfe!

Esercizio 1.10. Mostra che $\mathbb{RP}^1$ e S^1 sono diffeomorfi.