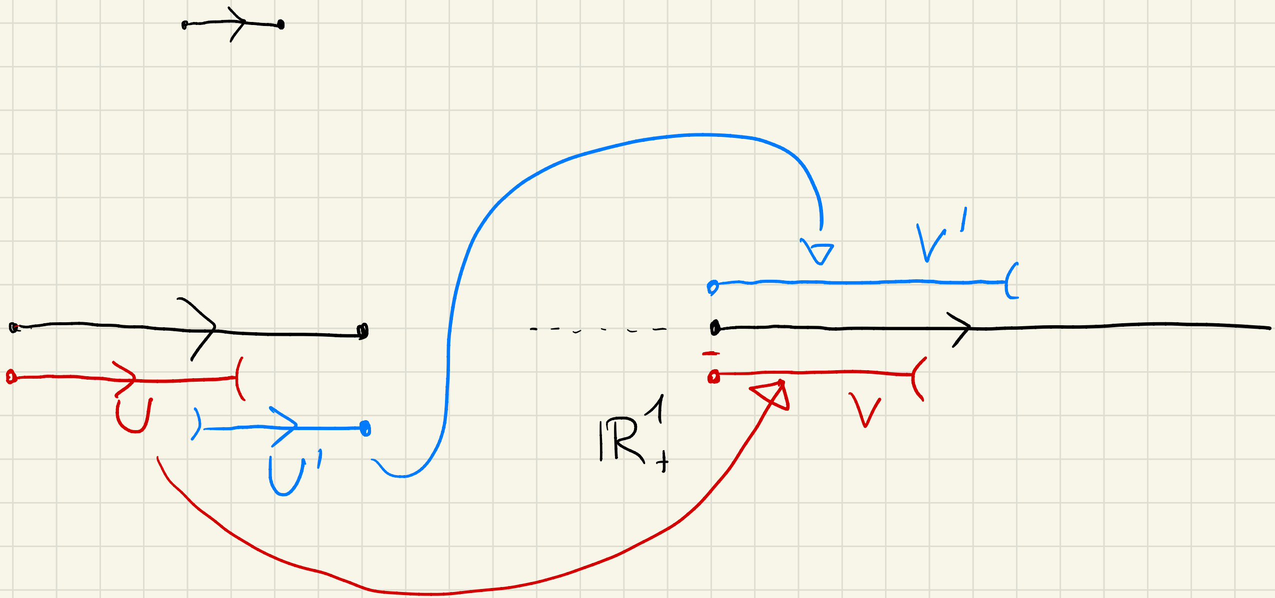
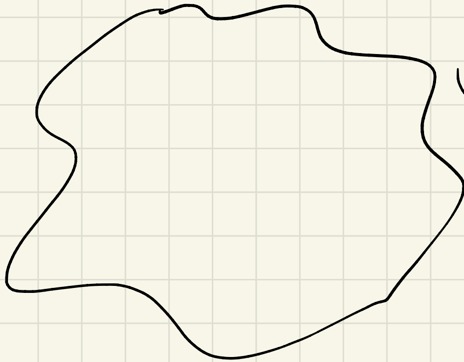
Lezione 11

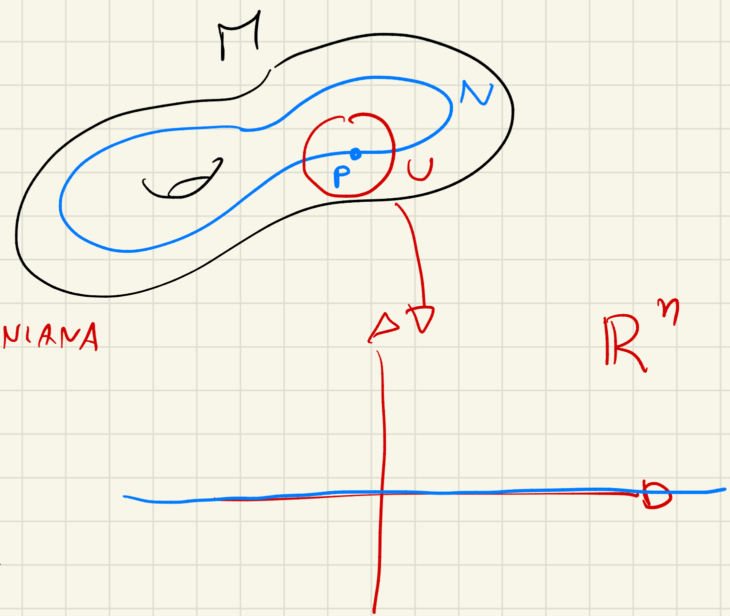




$U \subseteq \mathbb{R}^n$

$U = B^n$

$$g^H = \left(\frac{2}{1-\|x\|^2}\right)^2 g^E$$



Det: (M^n, g) varietà pR

Sia $N \subseteq M$ sottovarietà liscia connessa

Lei è SOTTOVARIETÀ PSEUDO-RIEMANNIANA

se $\forall p \in N$

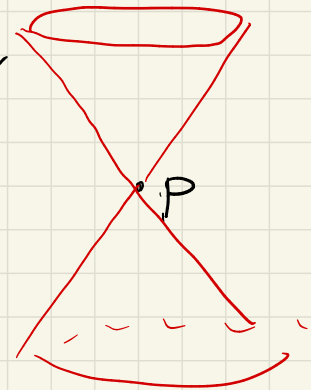
$T_pN \subseteq T_pM$ sottospazio

$g|_{T_pN}$ è NON DEGENERE

Oss: Se g è def+ questo è verificato sempre

Es: $\mathbb{R}^{2,1} \supseteq \gamma$

è sottovarietà pR se è tipo tempo o spazio



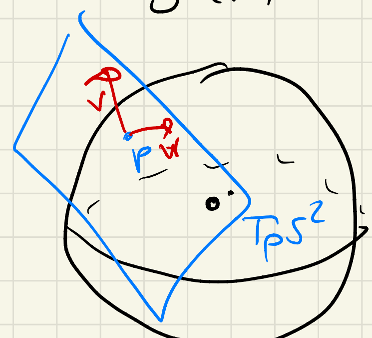
Oss: N è varietà pR $\quad (N, g')$

$$\forall p \in N \quad g'(p) := g\big|_{T_pN}$$

Es: $S \subseteq \mathbb{R}^n$ sottovarietà

Es: $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n, g^E)$

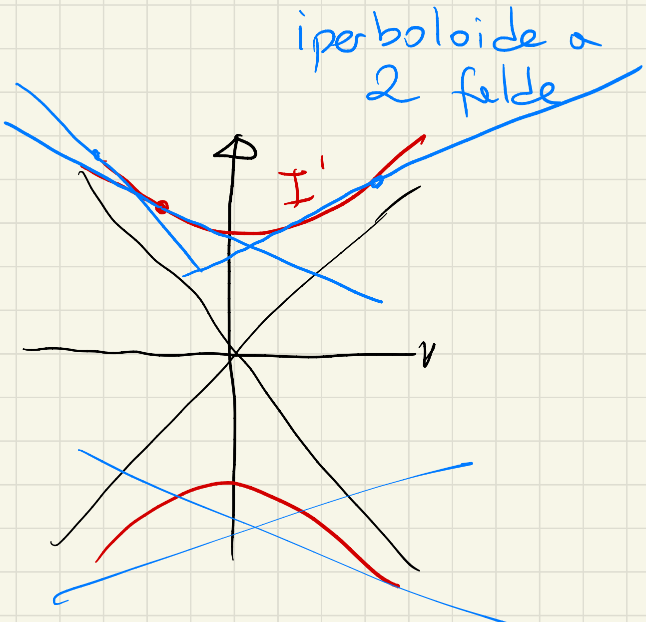


$S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

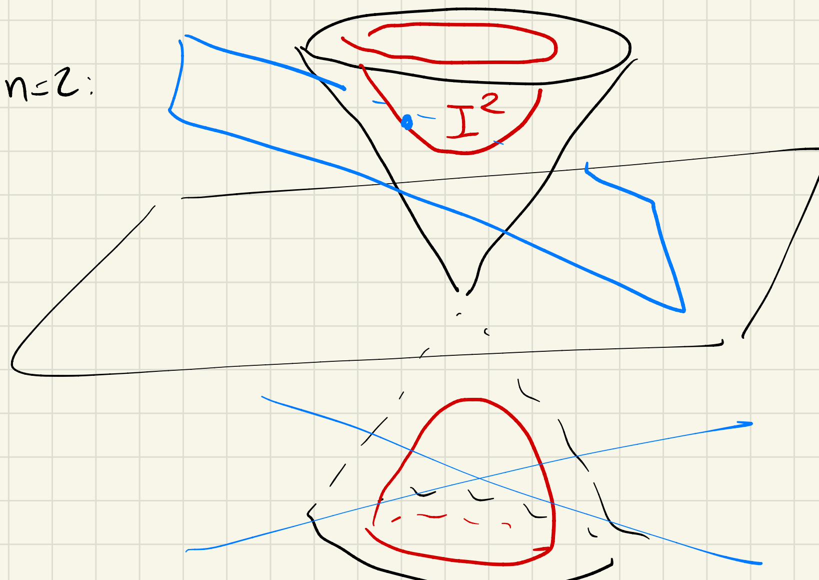
Es: $I^n \subseteq \mathbb{R}^{n,1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \eta) \qquad \eta = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

$$I^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, x \rangle = -1 \} \cap \{ x_1 > 0 \}$$

$$\langle x, x \rangle = -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = -1$$



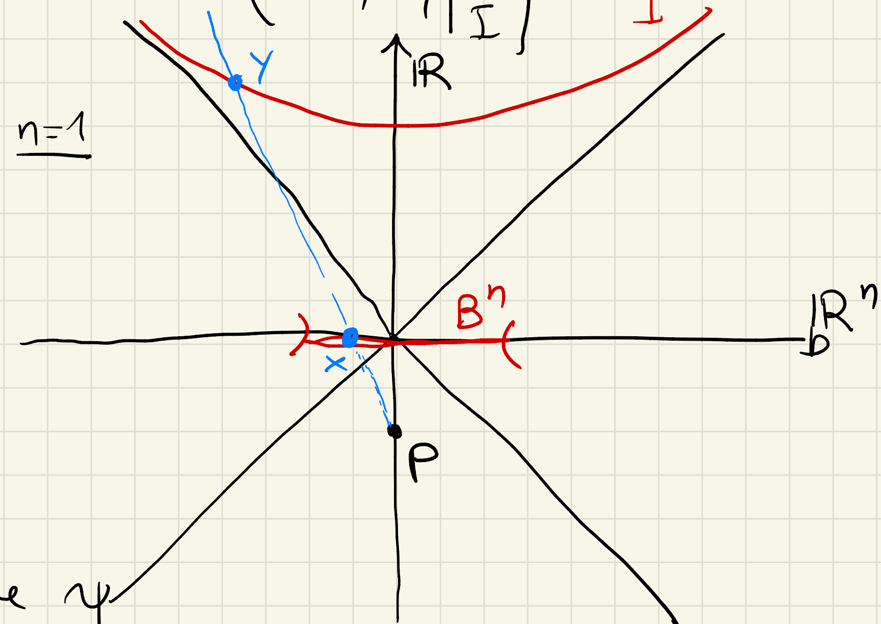
n=2:



Ex: $I^n \subseteq \mathbb{R}^{n,1}$ è sottovarietà pR Riemanniana

I^n è il MODELLO DELL'IPERBOLOIDE dello SPAZIO IPERBOLICO

Ex: (B^n, g^H) è isometrica a $(I^n, \eta|_I)$



$P = (-1, 0, \dots, 0)$

$\psi : B^n \xrightarrow{\sim} I^n$ diffeo

$\psi(x) = y$

Facendo i conti si vede che ψ è isometria cioè $\forall x \in B^n, \quad \forall v, w \in T_x B^n$

$$\underset{g^H}{\langle v, w \rangle} = \underset{\eta|_I}{\langle v', w' \rangle} \qquad \begin{aligned} v' &= d\psi_x(v) \\ w' &= d\psi_x(w) \end{aligned}$$

<u>Prop</u>: Ogni M ha struttura Riemanniana.

<u>dim</u>

$$\mathcal{A} = \{ \varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n \} \text{ atlante} \to \{U_i\} \text{ ric. aperto}$$

$$\to \exists \ \rho_i : M \to [0, \infty) \quad \text{partiz. unità}$$

$$\text{t.c.} \quad \operatorname{supp} \rho_i \subseteq U_i \qquad \sum_i \rho_i(p) = 1$$

Su U_i prendo $g_i := \varphi_i^*(g^E) \qquad g_i(v, w) := g^E(v', w')$

$$v' = (d\varphi_i^*)_x(v) \quad \ldots$$

Definisco $\forall p \in M$ $\quad g(p) := \sum_i \rho_i g_i(p)$

Si ottiene g campo tensoriale di tipo $(0,2)$ su M

simmetrico

<u>def +</u>

Combinaz. lineare con coeff. <u>positivi</u> di prod. scalari <u>positivi</u>

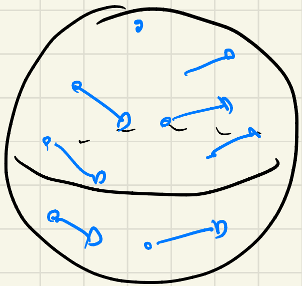
è definito positivo

infatti $$\underset{v \neq 0}{g(p)(v,v)} = \sum_i \underset{>0}{\rho_i} \underbrace{g_i(p)(v,v)}_{>0} > 0$$

$\square$

<u>Oss</u>: Non tutte le M hanno struttura Lorentziana

Teo: M ha struttura Lorentziana $\Longleftrightarrow$ ha un campo vettoriale mai nullo



S^2

$\nexists$ campo mai nullo su S^2

idem per S^4

$\boxed{\Leftarrow}$ (M, g) g Riemanniana X campo vettoriale mai nullo

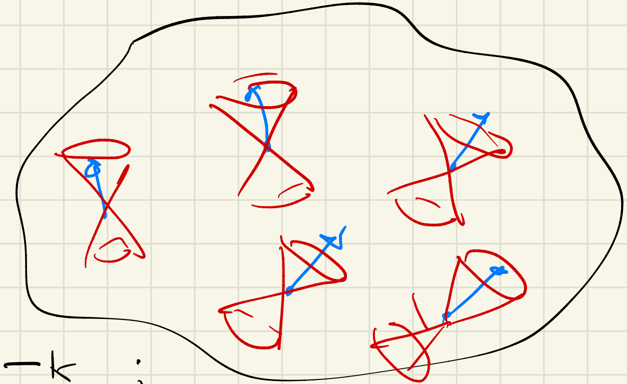
normalizzo X: $\bar{X}(p) = \dfrac{X(p)}{\|X(p)\|} = \dfrac{X(p)}{\sqrt{g(p)(X(p), X(p))}}$

$\|\bar{X}(p)\| = 1 \quad \forall p$

$$g'(p)(v, w) := g(p)(v, w) - 2\, g(p)(v, \bar{X}(p)) \cdot g(p)(\bar{X}(p), w)$$

$\forall p \in M, \ \forall v, w \in T_pM$

g' è nuovo tensore simm. $(0,2)$



In coordinate:

$$g'_{ij} v^i w^j = g_{ij} v^i w^j - 2\, g_{il} v^i \bar{X}^l g_{kj} \bar{X}^k w^j$$

cioè

$$g'_{ij} = g_{ij} - 2 g_{il} \bar{X}^l g_{kj} \bar{X}^k$$

Calcolo la segnatura di g'_{ij}:

$\mathcal{B} = \{ \bar{X}(p), v_2, \dots, v_n \}$ base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, g_{ij})$

Riscrivo g_{ij} e g'_{ij} rispetto a $\mathcal{B}$

Ottengo $g_{ij} = \delta_{ij}$ $\quad g'_{ij} = \delta_{ij} - 2\delta_{il} \bar{X}^l \delta_{kj} \bar{X}^k$

$$g'_{ij} = \delta_{ij} - 2\,\delta_{i1}\,\delta_{1j} = \eta_{ij}$$

$$= I - \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

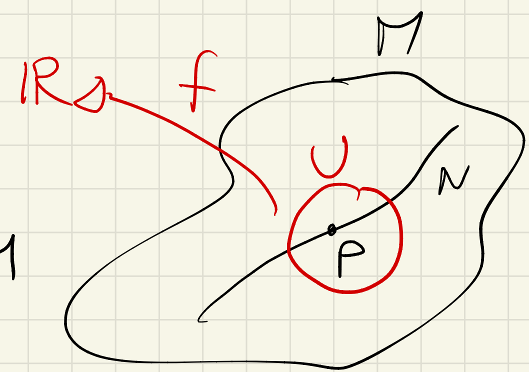
$$= \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \square$$

$N \subseteq M$ sottovarietà

$\forall p \in N \qquad T_pN \subseteq T_pM$

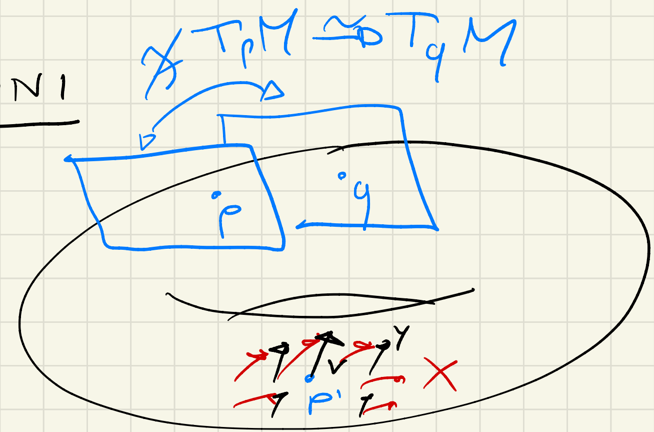
$v \in T_pN \dashrightarrow ? \quad v \in T_pM$

$f : U(p) \to \mathbb{R}$



$$v(f) := v\left(f\big|_{N\cap U}\right)$$

CONNESSIONI



CONNESSIONE = DERIVATA COVARIANTE

$\mathcal{L}_Y X = [Y, X]$

$\mathcal{L}_Y^s$

Def: M varietà.

Una DERIVATA COVARIANTE è un oggetto ∇ che $\forall p \in M$, $\forall X \in \mathfrak{X}(U(p))$ $\forall v \in T_pM$ definisce $\nabla_v X \in T_pM$

t.c.:

LOCALE

1) Se X e Y coincidono su $U(p)$ allora $\nabla_v X = \nabla_v Y$

LINEARE

2) Lineare in v e in X:

$$\nabla_v (\lambda X + \mu Y) = \lambda \nabla_v X + \mu \nabla_v Y$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$X, Y \in \mathfrak{X}(U(p))$

$$\nabla_{\lambda v + \mu w} X = \lambda \nabla_v X + \mu \nabla_w X$$

LEIBNITZ

3) $\nabla_v (f X) =$

$$\underbrace{\boxed{\nabla_v (f)}}_{v(f)} \cdot X(p) + f(p) \cdot \nabla_v (X)$$

$f \in \mathcal{C}^\infty(U(p))$

$X \in \mathfrak{X}(U(p))$

LISCIA

4) $\nabla_v X$ "dipende in modo liscio da v e da X"

formalmente: dati $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$

$$\nabla_Y X$$