ANNO ACCADEMICO 2001/2002

GEOMETRIA per FISICA Appello del 11/2/2002

Esercizio 1 [NO]

Siano $V, W \subset \mathbb{R}^3$ i sottospazi vettoriali dati da $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 3y + z = 0\}$, $W = \mathrm{Span}\,((1, 2, 3), (0, 1, 1))$.

Costruire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ invertibile e non diagonalizzabile tale che V e W siano f-invarianti e $f(1, 1, 0) = (2, 3, 3)$.

Esercizio 2 [NO, VO]

Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ discutere il seguente sisitema lineare:

$$\begin{cases} -3x + (3 - 3\alpha)y = 2 \\ x + (\alpha - \alpha^2)y + (\alpha\beta - 2\beta)z = \beta^2 + \alpha + \frac{1}{3} \\ -2x + (2 - 2\alpha)y + (\alpha - 2)z = \beta + \frac{4}{3} \end{cases}$$

Esercizio 3 [NO, VO]

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione 4 e $f : V \to V$ un endomorfismo tale che $f^4 - 2f^3 + f^2 = 0$. Torvare i possibili polinomi minimi di f nei casi seguenti:

1) f non è diagonalizzabile.

2) f ha un solo autovalore.

3) f è invertibile.

4) Esisite $v \in V$ tale che $\{v, f(v), f^2(v), f^3(v)\}$ è una base di V.

5) La molteplicità geometrica di 0 e 1 sono uguali e non nulle. (Nel caso siano entrambe uguali a 1, puo' essere utile dimostrare che $\ker f^2$ e kef $(f - id)^2$ devono avere dimensione minore o uguale a 2)

Sigle dell'esame: NO = Compito nuovo ordinamento; VO = Compito vecchio ordinamento.
Durata: 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

Esercizio 4 [NO, VO]

Determinare un prodotto scalare Φ su $\mathbb{R}^2$ non nullo tale che $\Phi((1,0),(1,1)) = 0$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x,y) = (-x+3y, -2x+3y)$, sia tale che $\Phi(f(v),w) = \Phi(v,f(w))$ $\forall\ v,w \in \mathbb{R}^2$.

Ne esiste uno definito positivo?

Rispondere alle stesse domande richiedendo $\Phi((1,0),(1,1)) = 1$.

Esercizio 5 [VO]

Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ riconoscere il tipo affine della conica data dall'equazione $(3a+1)x^2 + (3a-1)y^2 + (4a+4)x + (2a+2)y + 3 - a = 0$.

Dire se esistono due valori distinti di a per cui le due coniche corrispondenti sono isometriche.