ANNO ACCADEMICO 2001/2002

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I Primo compitino 30/11/2001

Esercizio 1

Sia $V = \mathbb{R}_k[x]$, $k \geq 2$, e siano $U = \{f \in V \mid x^2|f\}$, $W = \{f \in V \mid (x^2+1)|f\}$, dove $q|f$ significa q divide f, cioè $f = pq$ per qualche $p \in V$.

1) Dimostrare che U e W sono sottospazi vettoriali di V.

2) Dimostrare che U e W sono isomorfi.

3) Scrivere U come nucleo di una applicazione lineare $F : V \to \mathbb{R}^s$ con s che non dipende da k e scrivre la matrice di F nelle basi $1, x, x^2, \ldots, x^k$ di V e canonica di $\mathbb{R}^s$.

4) Per quali valori di k $U \cap W = \{0\}$?

5) Per quali valori di k $U \oplus W = V$?

Esercizio 2

Risolvere con l'algoritmo di Gauss al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + \alpha y + \beta z = 1 \\ 2x + 3\alpha y + 2\beta z = 2 \\ \beta x + \alpha(2+\beta)y + (\alpha + \beta + \beta^2)z = 2\beta \end{cases}$$

Esercizio 3

1) Dire per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a-2 & 3a-3 & 4a-3 \end{pmatrix}$$

2) Per $a = 1 - i$, trovare (se esiste) una base di $\mathbb{C}^3$ costituita da autovettori di A.