

Programma per il corso di *Analisi Reale*, a.a. 2020/2021

Valentino Magnani

1. **Misure e misure esterne.** Spazi mensurali, misure esterne e proprietà basilari, funzioni misurabili e loro approssimazione, misura di Lebesgue, insiemi non misurabili, algebre, anelli e semianelli di insiemi, estensione di Carathéodory-Hahn.

2. **Teoria dell'integrazione astratta.** Integrale di Lebesgue su uno spazio mensurale, teoremi di Beppo Levi, Fatou e Lebesgue, nozione di integrale su spazio mensurale tramite opportune somme superiori e inferiori, derivazione di integrali con parametro, differenze tra integrazione secondo Lebesgue e secondo Riemann, caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann.

3. **Spazi di Lebesgue.** Proprietà basilari degli spazi $L^p(X, \mu)$ rispetto una misura μ e loro completezza, con $1 \leq p \leq \infty$, convergenza in $L^p(X, \mu)$, convergenza puntuale q.o., convergenza in misura e relative implicazioni. Disuguaglianza di Jensen.

4. **Operazioni sulle misure.** Misure con segno, teorema di Hahn e decomposizione di Jordan per misure con segno, misure vettoriali, misure a valori in uno spazio di Banach, integrale di Bochner, assoluta continuità dell'integrale, teorema di Radon-Nikodym e perdita di validità per misure con valori in uno spazio di Banach. Rappresentazione del duale di $L^p(X, \mu)$ con $1 \leq p < +\infty$.

5. **Misure e topologia.** Misure boreliane, approssimazione di boreliani con aperti, chiusi e compatti, criterio di Carathéodory per misure boreliane, misure di Radon su spazi topologici, teorema di Lusin e densità delle funzioni continue $L^p(X, \mu)$ ove X è un opportuno spazio topologico, teorema di rappresentazione di Riesz.

6. **Misure prodotto.** Prodotto di spazi mensurali, teoremi di Fubini e di Tonelli su spazi mensurali e controesempi ad ipotesi più deboli.

7. **Funzioni assolutamente continue e a variazione limitata.** Teorema di Vitali, differenziabilità quasi ovunque delle funzioni monotone, funzioni a variazione limitata e funzione di Cantor. Funzioni assolutamente continue e loro caratterizzazione tramite il teorema fondamentale del calcolo.

8. **Materiale opzionale.** Misura e dimensione di Hausdorff, calcolo della dimensione di Hausdorff di frattali, mappe holderiane e misura di Hausdorff, uguaglianza tra misura di Hausdorff e misura di Lebesgue, formula dell'area nello spazio euclideo.

Tutti gli argomenti del programma sono da intendersi con relative dimostrazioni.