Analisi II. Foglio di esercizi n.4
21/11/2018

`Esercizi sull'integrazione rispetto la misura di superficie`

1. Consideriamo l'*astroide* $\gamma(\varphi) = r(\cos^3\varphi, \sin^3\varphi)$ con $r > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$.

   (a) Tracciare il grafico della curva nel piano.

   (b) Calcolare l'area dell'insieme limitato A delimitato da tale curva.

   Sugg. Utilizzare la 1-forma differenziale d'area $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$, oppure osservare che la curva soddisfa l'equazione $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = r^{2/3}$ e utilizzare le simmetrie.

2. Calcolare l'area dell'insieme

$$E = \{(t\cos\varphi, t\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \varphi < \pi,\ 0 < t < 1 + \sin(2\varphi)\}.$$

   Sugg. Utilizzare la 1-forma differenziale d'area $\frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$.

3. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 0 \text{ e } 0 \leq z \leq 2\}$. Tracciare un grafico qualitativo di Σ e calcolarne l'area.

4. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 + 2x^2 + 2y^2 < z < 2 - 2x^2 - 2y^2\}$. Si tracci il grafico di tale insieme e si calcoli l'area di $\partial\Omega$.

5. Scrivere il valore dell'area del grafico di $u : B \to \mathbb{R}$, dove abbiamo definito $u(x, y) = x + y^2 - x^2 - y$ e

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}\right\}.$$

6. Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di rotazione ottenuta ruotando $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (0, t^2, t^4 + 1)$ attorno all'asse z. Calcolare l'area di Σ.

7. Sia $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - |z| - \frac{3}{4} < 0,\ |z| < \frac{1}{2}\right\}$. Sia

$$\Sigma = \partial\Omega \setminus \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| = \frac{1}{2}\right\}$$

   e ν la normale esterna di Ω. Dato $F(x, y, z) = (y - z, x + z, z)$, calcolare il flusso $\Phi(F, \Sigma, \nu)$.

8. Data $\Sigma = \{(x,y,z) : 0 = e^{\sin x} - y + \log\big(2+\cos(zx)\big),\ x^4+z^4<1\}$. Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva chiusa e semplice di classe C^1 la cui immagine è ∂H con $H = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x^4+z^4<1\}$ e che orienta positivamente tale aperto. Calcolare $\int_{\Phi\circ\gamma} xdx + ydy + zdz$, dove

$$\Phi(x,z) = \Big(x, e^{\sin x} + \log\big(2+\cos(xz)\big), z\Big)\,.$$

9. Consideriamo $F(x,y) = (e^x - y^2x, e^{-\sin y} + yx^2)$ e l'aperto

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 < 1,\ 0 < x < \sqrt{3},\ y > 0\}.$$

Sia Γ la curva C^1 a tratti iniettiva, che percorre tutto l'insieme $\partial\Omega$ in senso orario. Scrivere il valore di $\int_\Gamma F$, argomentando la risposta.

10. Consideriamo $F(x,y) = (x^2-y^2, x^2+y^2)$ e l'aperto

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y<1,\ y-x<1,\ y>0\}.$$

Sia Γ la curva C^1 a tratti e semplice, la cui immagine è $\partial\Omega$ e che percorre tale insieme in senso antiorario. Calcolare $\int_\Gamma F$.

11. Calcolare l'area dell'insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ delimitato dalle curve $\gamma(t) = (t^2e^t, t^2)$ su $[0,1]$ e $c(t) = (te, t)$ su $[0,1]$.

12. Consideriamo il seguente insieme aperto

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2-4<0 \text{ e } x^2+z^2-1<y<5\}$$

e sia ν la sua normale esterna nei punti di frontiera regolare. Introduciamo il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2z}{y+2}, 1+x^3\sin(y\pi), \frac{xz}{y+4}\right),$$

il quale è ben definito su $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y < 5\} \cap \partial\Omega$. Calcolare $\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} F, \nu\rangle\, d\sigma$.

13. Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2<z<1\}$ e definiamo il campo vettoriale $F(x,y,z) = (xz, xy, 1)$. Considerando la superficie elementare

$$\Sigma = \left\{(x,y,x^2+y^2) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2<1\right\}$$

e la normale esterna ν ad Ω, calcolare il flusso $\int_\Sigma \langle F, \nu\rangle\, d\sigma$.

14. Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < y < 4,\ y > 1\}$ e si consideri il campo vettoriale $F(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}(x,0,z)$, il quale è ben definito su

$$\Sigma = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < y < 4\Big\} \cap \partial\Omega.$$

Calcolare il flusso $\int_\Sigma \langle F, \nu \rangle d\sigma$, dove ν è la normale esterna ad Ω e σ denota la misura di superficie 2-dimensionale.

15. Consideriamo la superficie elementare con bordo

$$\Sigma = \{(x,y,z) : x + 2y + 3z = 1, x, y, z \geq 0\}.$$

(a) Sia γ la curva C^1 a tratti, semplice e chiusa, la cui immagine è il bordo $\partial\Sigma$ e che passa nell'ordine per $(1,0,0)$, $(0,1/2,0)$ e $(0,0,1/3)$. Calcolare la circuitazione $\int_\gamma y dx - x dy + y dz$, sia per calcolo diretto che attraverso un opportuno utilizzo del teorema di Stokes.

(b) Data ν normale a Σ tale che abbia seconda componente positiva e dato $F(x,y,z) = (x - y, y + z, x + y)$, calcolare il flusso $\Phi(F, \Sigma, \nu)$.

16. Consideriamo l'insieme

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 - (x-1)^2 = 0,\ |x| \leq 1\}$$

ed il campo vettoriale $F = (xyz + yz, xz + x^4, 2x^2 zy)$.

(a) Si tracci un grafico qualitativo di tale insieme.

(b) Calcolare $\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle \, d\sigma$, dove ν è la normale a Σ nei punti 2-regolari e la cui prima componente è positiva.

17. Si consideri l'insieme $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ y + z \leq 2, z \geq 0\}$.

(a) Tracciare un grafico qualitativo di C, determinando il suo bordo e provando che è costituito da curve regolari.

(b) Determinare una parametrizzazione γ della parte superiore del bordo tale che la sua composizione con la proiezione sul piano xy determini una curva orientata in senso antiorario.

(c) Calcolare la circuitazione $\int_\gamma x^2(1-z)dx + y^2(1-z)dy + (x^2+y^2)dz$, sia direttamente che utilizzando opportunamente il teorema di Stokes.

Suggerimento: Occorre trovare la giusta scelta della normale ν a C.

18. Consideriamo gli aperti

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|\} < 2 \text{ e } 0 < z < 1\},$$
$$\Omega_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4 \text{ e } z > 0\}$$

e si definisca $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Dati $F(x, y, z) = (x, x, zxy)$ e

$$\Sigma = \overline{(\partial\Omega) \setminus \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}}$$

superficie regolare a tratti, con normale esterna ν ad Ω nei punti $\partial_{reg}\Omega$, si calcoli

$$\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} F, \nu\rangle \, d\sigma.$$

19. Dati $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 1 < z < 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ ed il campo

$$F(x, y, z) = \left(z^5 + e^y + xy, \log(2 + z) + y, x^7y^3 + zx^3\right),$$

calcolare $\Phi(F, \partial\Omega, \nu)$, dove ν è la normale esterna su $\partial_{reg}\Omega$.

20. Consideriamo l'insieme

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0, \ x \leq 2^{-1}, \ y \leq 2^{-1}\}.$$

(a) Tracciare un grafico qualitativo di Σ.

(b) Orientando Σ con la normale $\nu(x, y, z) = (x, y, z)$, calcolare

$$\int_{\partial^+_\nu \Sigma} y dx + (x - z^2) dy + xz dz \, .$$

21. Consideriamo l'insieme aperto

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} < 1, \ x^2 + (y - 2)^2 + z^2 > 1\right\},$$

ed il campo $F(x, y, z) = (x + y, y - 2, z - xy)$.

(a) Tracciare un grafico qualitativo di Ω.
Suggerimento: Provare che $\partial B((0, 2, 0), 1)$ è contenuto nell'aperto $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} < 1\}$.

(b) Determinare $\partial\Omega$, $\partial_{reg}\Omega$ e la normale esterna ν ad Ω.

(c) Calcolare sia $\Phi(F, \partial\Omega, \nu)$ che $\Phi(F, \Sigma, \nu)$, dove $\Sigma = \partial H$.

22. Sia $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - |z| - \frac{3}{4} < 0, \ |z| < \frac{1}{2}\right\}$.

(a) Provare che Ω è limitato e stabilire se $\partial\Omega$ è una superficie regolare a tratti.

(b) Tracciarne un grafico qualitativo evidenziando un asse di simmetria.

(c) Sia $\Sigma = \partial\Omega \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| = \frac{1}{2}\}$ e ν la normale esterna di Ω. Calcolare $\Phi(\operatorname{rot} G, \Sigma, \nu)$, dove $G(x, y, z) = (x^2 - y, zy^2, z)$.

23. Definiamo l'insieme

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + (y - x)^2 + x^2 = 1,\ (y - x)^2 + x^2 \leq 1\}.$$

(a) Stabilire se tutti i punti del bordo $\partial\Sigma$ sono regolari.

Suggerimento: Osservare che $(y - x)^2 + x^2 = 1$ è una curva di classe C^1 e chiusa (trattasi precisamente di un'ellisse).

(b) Calcolare $\Phi(F, \Sigma, \nu)$, dove $F(x, y, z) = (e^z - y^8, z^8 - e^x, 1 + x)$ e ν è la normale a Σ con terza componente ovunque positiva.

(c) Calcolare $\int_\gamma (xz^2 + x)dx + (yx^2 + z)dy + (xy^2 + x)dz$, dove γ è la curva che percorre interamente una ed una sola volta il bordo $\partial\Sigma$ in senso antiorario.