Complementi di Analisi Matematica. Foglio di esercizi n.6
16/3/2018
(Aggiornamento del 6/4/2018)

`Esercizi sulla funzione implicita e superfici`

Esercizio 1 Si consideri l'insieme

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2y - xe^y = 2\}.$$

1. Mostrare che Z è un x grafico contenente il punto $(0, 1)$.
2. Se φ denota la funzione che definisce tale grafico, si determinino $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0.$$

Esercizio 2 Definiamo l'insieme

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2y - x^3 - z^3x + y^3x^2 - z^4 = 0\right\}.$$

1. Stabilire se S è non vuoto. Dimostrare che esistono un aperto $O \subset \mathbb{R}^2$ e $\varphi \in C^1(O)$ tali che $(x, \varphi(x, z), z) \in S$ per ogni $(x, z) \in O$. Stabilire se $\varphi \in C^{10}(O)$.
2. Trovare il più grande aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi \in C^1(\Omega)$ e $(x, \varphi(x, z), z) \in S$ per ogni $(x, z) \in \Omega$. Stabilire se vale $\{(x, \varphi(x, z), z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in \Omega\} = S$.
3. Calcolare il piano tangente ad S passante per $p = (1, 1, 1)$.

Esercizio 3 Determinare quale sia l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ dei $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$M_\lambda = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^6 + \lambda^2x^2y^6 + y^2z^2 + z^6 = 1\right\} \neq \emptyset.$$

Determinare l'insieme $B \subset A$ dei λ tali che M_λ è una 2-superficie.

Esercizio 4 Consideriamo l'insieme dei punti $M \subset \mathbb{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x^2 - y + z = 4 \\ z^2 - y^2 - 2x = 0 \end{cases}.$$

1. Provare che M è non vuoto ed è una 1-superficie.
2. Scegliere un qualunque punto $p \in M$ e determinare lo spazio tangente T_pM.

Suggerimento: Provare che una funzione definente M come insieme di livello ha sempre almeno un minore di ordine massimo in ogni punto di M.

Esercizio 5 Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \sin x + e^{x-y} + \log(1 + z^2 + t^2) = 1 \\ \sin y + e^{z+t} = 1 \end{cases},$$

il quale ha l'origine $P = (0, 0, 0, 0)$ come soluzione.

1. Stabilire se esistono infinite soluzioni vicino all'origine.

2. Stabilire se l'origine P è un punto k-regolare dell'insieme S di tutte le soluzioni del sistema ed in tale caso determinare k.

3. Se P è k-regolare per S, determinare un insieme di variabili rispetto alle quali $S \cap O$ è un grafico con O aperto opportuno contenente l'origine P.

4. Se P è k-regolare per S, determinare lo spazio tangente $T_P S$.

Esercizio 6 Si consideri l'equazione $1 + z^2 + y^2 + \log(1 + \cos^2 x) = e^{x - \frac{\pi}{2}}$, che definisce un insieme S.

1. Si provi che esiste $B(0, \delta) \subset \mathbb{R}^2$ e $\varphi : B(0, \delta) \to \mathbb{R}$ tale che i punti $\big(\varphi(y, z), y, z\big)$ siano soluzioni dell'equazione data per ogni $(y, z) \in B(0, \delta)$ e $\varphi(0, 0) = \pi/2$.

2. Verificare che la φ considerata al punto precedente ha un punto critico nell'origine e stabilire se si tratta di un punto di massimo locale, di minimo locale, di sella o nessuno di questi casi.

Esercizio 7 Si consideri l'insieme dei punti S di $\mathbb{R}^2$ definito dall'equazione

$$x^2 + \sin x + y^2 \cos y = 0.$$

1. Si provi che esistono $\delta > 0$ e $\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ di classe C^1, tali che i punti $\big(\varphi(y), y\big)$ siano soluzioni dell'equazione data per ogni $y \in (-\delta, \delta)$ e $\varphi(0) = 0$.

2. Verificare che l'origine è un punto critico per la φ considerata al punto precedente e stabilire se tale punto è di massimo locale, di minimo locale o nessuno di questi casi.

Esercizio 8 Si consideri l'equazione $\log(1 + x^3) + x^3 + y^2 \sin y + y = 0$, che definisce un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^2$.

1. Si provi l'esistenza di $\delta > 0$ e $\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ di classe C^1, tali che i punti $\big(x, \varphi(x)\big)$ siano soluzioni dell'equazione data per ogni $x \in (-\delta, \delta)$ e $\varphi(0) = 0$.

2. Verificare che la φ considerata al punto precedente ha derivate prima e seconda nulle in 0. Stabilire se il punto l'origine è un punto di massimo locale, minimo locale o nessuno di questi.

3. Determinare lo svillupo di Taylor fino al nono ordine di φ nell'origine.

Esercizio 9 Stabilire se è vero che per ogni intero positivo n l'insieme

$$\Sigma_n = \big\{(x, y, z) : z - z^3 x^2 - y^n = 0\big\}$$

è una 2-superficie regolare di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 10 Al variare di p nell'insieme $\{(0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2)\}$, stabilire se per ciascun elemento dell'insieme esiste una coppia di variabili rispetto alle quali è possibile rappresentare tutte le soluzioni dell'equazione $e^y + \sin(xyz) = e$ sufficientemente vicine a p. Determinare tali coppie di variabili, nel caso esistano.

Esercizio 11 Consideriamo l'insieme $\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2e^y + ye^x = 0\}$. Sia $\varphi : (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}$, con $\delta > 0$, una funzione tale che $(t,\varphi(t)) \in \Sigma$ per ogni $t \in (-\delta,\delta)$. Stabilire se tale funzione è unica per δ sufficientemente piccolo, se è derivabile nel corrispondente intervallo $(-\delta,\delta)$ e calcolare $\varphi'(0)$, se esiste. Stabilire se l'origine per φ è un punto di minimo, di massimo o nessuno di questi.

Esercizio 12 Consideriamo l'insieme S dei punti $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ che risolvono il sistema

$$\begin{cases} xy + e^{x+y} + z - 1 = 0 \\ xz + \log(1 - y + yt) - t + 1 = 0 \end{cases}.$$

1. Mostrare che $p_0 = (0,0,0,1)$ è un punto regolare di S.
2. Determinare delle variabili rispetto alle quali S è un grafico per i suoi punti sufficientemente vicini a p_0.
3. Detta φ la funzione implicita rispetto le variabili trovare al punto precedente, calcolare la matrice jacobiana di φ nel punto u_0, tale che $(u_0, \varphi(u_0)) = p_0$.
4. Determinare lo spazio tangente ad S passante per p_0.

Esercizio 13 Consideriamo il sistema non lineare

$$\begin{cases} \sin(xy) + xe^y = e\pi \\ z - x^2 = 0 \end{cases}$$

ed una sua soluzione $p_0 = (\pi, 1, \pi^2)$. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme delle soluzioni di tale sistema.

1. Stabilire se p_0 è regolare per S ed in tal caso determinare le variabili rispetto alle quali S è un grafico per punti di S vicini a p_0.
2. Determinare lo spazio tangente ad S passante per p_0

Esercizio 14 Si consideri il seguente sistema non lineare in quattro variabili

$$\begin{cases} x^4 - y^4 + z^2 = 1 \\ tx^5 - xt^5 + x = 1 \end{cases}.$$

1. Provare che esistono infinite soluzioni del sistema che siano arbitrariamente vicine alla soluzione $p_0 = (1,-1,1,1)$, rappresentandole come grafico ed evidenziando la scelta delle variabili indipendenti.
2. Stabilire se esistono altre scelte di variabili per rappresentare le soluzioni sufficientemente vicine a p_0, ed in tal caso evidenziarle.
3. Stabilire se p_0 è un punto k-regolare per l'insieme $S \subset \mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema. In tal caso determinare k e lo spazio tangente $T_{p_0}S$.

Esercizio 15 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y,z) = \arctan(xy^2) + e^{\sin\left(\arctan(xz^2)\right)}$$

1. Si determini l'immagine di f.

2. Si provi che l'equazione $f(x, y, z) = \pi/2$ ha soluzione e che l'insieme di tutte le soluzioni costituisce una sottovarietà di dimensione due.

3. Mostrare che tale sottovarietà si può rappresentare come grafico di una funzione di classe C^∞ definita su un aperto di $\mathbb{R}^2$.

4. Stabilire se l'insieme
$$f^{-1}(\pi/2) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 < \varepsilon\}$$
è limitato per qualche $\varepsilon > 0$.

Esercizio 16 Consideriamo l'insieme $M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + e^y + z^2 = 1,\ t^2 + \sin x = 0\}$. Provare che M è una superficie di dimensione due in $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 17 Si consideri il polinomio
$$F(x, y) = x^2 + y^2 - yx^2 - y$$
e sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ il suo luogo di zeri.

1. Determinare in quali punti di S la funzione F definisce implicitamente una curva tramite il teorema della funzione implicita.

2. Trovare i punti 1-regolari di S dove la tangente sia parallela alla retta $y = 0$.

Esercizio 18 Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme
$$M_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = \lambda\}$$
è una 1-superficie di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 19 Si consideri il polinomio
$$F(x, y, z) = 1/4x^2 + 1/9y^2 + z^2 - 2x - y - 4$$
e si consideri luogo di zeri $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$.

1. Determinare in quali punti di S la funzione F definisce implicitamente una 2-superficie tramite il teorema della funzione implicita. Se tutti i punti sono 2-regolari, riconoscere la superficie definita implicitamente.

2. Trovare i punti 2-regolari di S in cui il piano tangente si parallelo al piano $y = 0$.

3. Trovare i punti 2-regolari di S in cui il piano tangente si parallelo al piano $y = z$.

Esercizio 20 Si consideri l'insieme
$$S = \Big\{(\theta \sin\theta \cos\varphi, \theta \sin\theta \sin\varphi, \theta \cos\theta) \in \mathbb{R}^3 : 1 < \theta < 2,\ 0 < \varphi < 2\pi\Big\}.$$

1. Provare che S è una 2-superficie regolare (sottovarietà 2-dimensionale di $\mathbb{R}^3$).

2. Determinare lo spazio tangente T_pS e lo spazio tangente passante per $p = \left(-\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$.

Suggerimento: in questo caso è conveniente rappresentare lo spazio tangente come immagine di un opportuno differenziale.

Esercizio 21 Definiamo al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$M_\lambda = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 - 3xy = \lambda\right\}.$$

1. Determinare l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ dei λ tali che $M_\lambda \neq \emptyset$.

2. Determinare il sottoinsieme $B \subset A$ dei λ tali che M_λ è una 1-superficie regolare.

3. Tracciare un grafico qualitativo di M_λ al variare di $\lambda \in A$.

4. Tracciare i punti regolari di M_0 dove lo spazio tangente è parallelo alla retta di equazione $x + y = 3$.

Soluzione. La funzione $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ è continua su $\mathbb{R}^2$ con

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty \quad \text{e} \quad \inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$$

pertanto $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$. Da questo segue immediatamente che $M_\lambda \neq \emptyset$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, quindi $A = \mathbb{R}$. Consideriamo i punti dove si annulla il gradiente

$$\nabla f(x, y) = \left(3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x\right) = (0, 0),$$

da cui $y = x^2$ e $x = y^2$. Tale sistema ha le due sole soluzioni

$$p_1 = (0, 0) \quad \text{e} \quad p_2 = (1, 1),$$

che costituiscono i due soli punti critici di f. Calcolando la matrice hessiana di f in tali punti si osserva che p_2 è un minimo locale di f, mentre p_1 è un punto di sella. Abbiamo inoltre i valori critici

$$f(p_1) = 0 \quad \text{e} \quad f(p_2)) = -1.$$

Per $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ l'insieme M_λ è una 1-superficie regolare, poiché $M_\lambda = f^{-1}(\lambda)$ con ∇f non nullo in tutti i punti di M_λ. Consideriamo $\lambda = 0$, ove i punti di M_0 in coordinate polari $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$ danno l'equazione

$$\rho = r(\theta) := \frac{3\cos\theta \sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta} \qquad \text{con} \quad \theta \neq \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

Abbiamo che le coordinate $x(\theta) = r(\theta)\cos\theta$ e $y(\theta) = r(\theta)\sin\theta)$ sono positive per $\theta \in (0, \pi/2)$. Da tali formule abbiamo

$$(x(\theta), y(\theta)) \to (0, 0)$$

sia per $\theta \to 0^+$ che per $\theta \to \frac{\pi}{2}^-$. Tali limiti implicano che la curva tende a zero in modo tangente all'asse delle x nel primo caso ed all'asse delle y nel secondo caso.

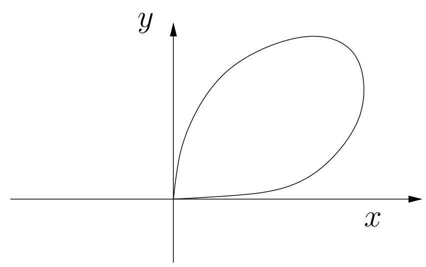

Figura 1

Utilizzando la simmetria dell'equazione rispetto la bisettrice del primo e terzo quadrante $(x, y) \to (y, x)$, osservando infine che r è limitata su $(0, \pi/2)$ possiamo tracciare un grafico qualitativo della curva nel primo quadrante, come in Figura 1.
Per $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ abbiamo $\cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta) < 0$ mentre si verifica che

$$\begin{cases} \sin^3\theta + \cos^3\theta > 0 & \text{se } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{4}\pi \\ \sin^3\theta + \cos^3\theta < 0 & \text{se } \frac{3}{4}\pi < \theta < \pi \end{cases}.$$

Non abbiamo quindi punti di M_0 nella seconda metà (orientando i quadranti in senso antiorario) del quarto quadrante, mentre ne abbiamo nella prima metà, muovendosi in senso antiorario. Ciò è dovuto al fatto che, in virtù delle considerazioni precedenti, se $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{4}\pi$, allora $r(\theta) < 0$ e dunque i punti corrispondenti a tali valori di θ sono nella prima metà del quarto quadrante. Utilizzando la simmetria di M_0 già menzionata ed il limite

$$\lim_{\theta \to \frac{3}{4}\pi^-} r(\theta) = +\infty.$$

giungiamo quindi al grafico di M_0 tracciato in Figura 2. L'autointersezione nell'origine mostra

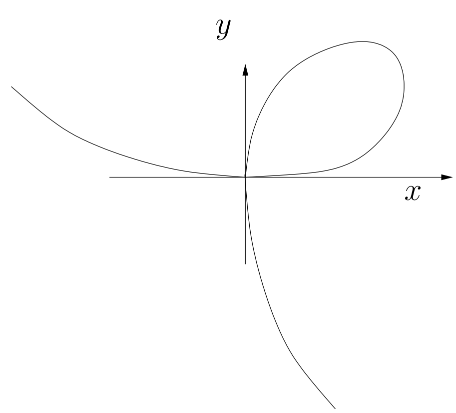

Figura 2

che M_0 non può essere una 1-superficie regolare. Osservando che M_{-1} contiene un minimo locale stretto di f, concludiamo che tale insieme contiene un punto isolato, quindi non può essere una 1-superficie e pertanto $B = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.
Dal fatto che p_1 è un punto di sella e p_2 è un punto di minimo locale possiamo dedurre una forma qualitativa per i grafici di M_λ al variare di λ come numero reale. In Figura 3 diamo una esemplificazione di tali grafici.

Infine per determinare i punti di M_0 regolari con spazio tangente parallelo alla retta di equazione $x+y=3$ dobbiamo semplicemente imporre la condizione

$$\det\begin{pmatrix} x^2-y & y^2-x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = x^2-y-y^2+x = (x-y)(1+x+y) = 0.$$

I punti si determineranno intersecando M_0 con le singole rette di equazione $x=y$ e $x+y=-1$. L'intersezione con la retta di equazione $x=y$ è il singolo punto $(3/2,3/2)$. Valutiamo infine l'intersezione di M_0 con la retta di equazione $x+y=-1$. Possiamo semplicemente sostituire le coordinate polari che determinano M_0 nell'equazione della retta, ottenendo che

$$-1 = 3\left(\frac{\cos^2\theta\,\sin\theta+\cos\theta\,\sin^2\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\right) = 3\left(\frac{\cos\theta\sin\theta}{1-\cos\theta\sin\theta}\right)$$

con la condizione già vista $\theta\neq 3\pi/4, 7\pi/4$. In altre parole M_0 non ha punti con tali angoli. Otteniamo dunque l'equazione

$$2\cos\theta\,\sin\theta = \sin(2\theta) = -1$$

che ha come soluzioni proprio $3\pi/4$ e $7\pi/4$, che erano escluse. Tale contraddizione mostra che $x+y=-1$ non interseca M_0. Concludiamo pertanto che il solo punto $(3/2,3/2)$ di M_0 ha la proprietà richiesta.

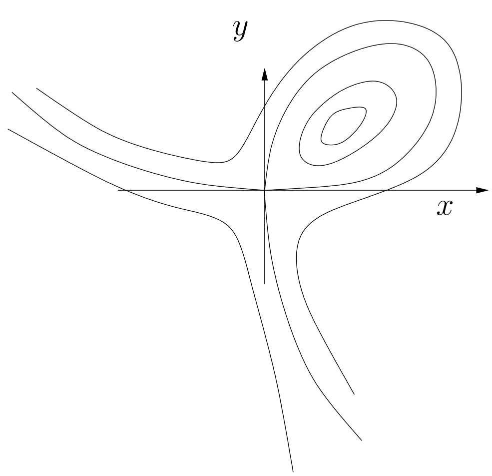

Figura 3