Pisa, 21 Luglio 2014

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

UNIVERSITÀ DI PISA.

Quarta prova scritta di Analisi Matematica I.

(1) **Esporre lo svolgimento degli esercizi in maniera chiara e leggibile.**
(2) **È proibito comunicare con gli altri candidati in qualunque forma.**
(3) **È proibito l'utilizzo di telefoni cellulari.**

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2 + \log(1 + e^x)}\right).$$

Si risponda alle seguenti domande, motivandone la risposta.

(1) Determinare il più grande sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}$ dove f è ben definita.
(2) Studiare la monotonia di f.
(3) Stabilire se f ha punti di massimo o di minimo, sia locali che globali.
(4) Determinare l'immagine f su D, ovvero l'insieme $f(D)$.

Soluzione. Poichè $\log(1 + e^x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$0 < \frac{\pi}{2 + \log(1 + e^x)} < \frac{\pi}{2}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Essendo la tangente ben definita su $(0, \pi/2)$, ne segue che f è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto il sottoinsieme di definizione più grande è $\mathbb{R}$, ovvero $D = \mathbb{R}$. Definiamo quindi

$$g(x) = \frac{\pi}{2 + \log(1 + e^x)}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Abbiamo quindi

$$g'(x) = -\frac{\pi\, e^x}{(1 + e^x)}\, \frac{1}{\big(2 + \log(1 + e^x)\big)^2} < 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poichè $f(x) = \tan(g(x))$ e $0 < g(x) < \pi/2$, abbiamo che $f(x) > 0$ e

$$f'(x) = \big(1 + \tan^2\big(g(x)\big)\, g'(x) < 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi f è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$ e non può avere massimi o minimi locali in quanto in tali punti dovrebbe avere derivata nulla. Abbiamo inoltre l'esistenza dei seguenti

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0\,.$$

Ne segue pertanto che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0\,.$$

Il primo limite mostra che $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$, quindi f non ha massimo globale. Poichè $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, tenuto conto del secondo limite precedente abbiamo $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$. Ne segue che f non ha minimo globale. Dato $\lambda > 0$, dai limiti precedenti esitono $M_1, M_2 > 0$ tali che

$$0 < f(M_2) < \lambda < f(-M_1) < +\infty\,.$$

Essendo f continua, $f([-M_1, M_2])$ è un intervallo, quindi $\lambda \in f([-M_1, M_2])$. Questo dimostra l'inclusione $(0, +\infty) \subset f(\mathbb{R})$. L'inclusione opposta segue dal fatto che f è sempre positiva.

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{(x^2+x+1)} e^{-x}$$

per ogni $x > 0$. Studiare l'esistenza ed in tal caso calcolare il limite della funzione f per $x \to +\infty$.

Soluzione. Utilizzando lo sviluppo $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$, ne segue che per $x \to +\infty$ abbiamo

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} e^{-x} \\
&= \big(1 + o(1)\big)\, e^{x \log(1+x^{-1})}\, e^{[x^2 \log(1+x^{-1}) - x]} \\
&= \big(1 + o(1)\big)\, e^{x\left(x^{-1} + o(x^{-1})\right)}\, e^{\left[x^2\left(x^{-1} - x^{-2}2^{-1} + o(x^{-2})\right) - x\right]} \\
&= \big(e + o(1)\big)\, e^{-2^{-1} + o(1)} \\
&= \sqrt{e} + o(1)
\end{aligned}$$

pertanto f ha limite per $x \to +\infty$ e si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{e}\,.$$

Esercizio 3. Stabilire se l'integrale improprio

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^5 x}{(1+\sin x)^2}\, dx$$

converge e nel caso calcolarne il valore.

Soluzione. L'integrale dato esiste se e solo se esiste il limite della funzione

$$F(\beta) = \int_{\beta}^{0} \frac{\cos^5 x}{(1+\sin x)^2}\, dx$$

per $\beta \to (-\frac{\pi}{2})^+$. È sufficiente utilizzare il cambio di variabile

$$x = \arcsin t,$$

con $t \in [-1, 0]$. Osserviamo inoltre che $\cos x \geq 0$ per $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, quindi per tali x possiamo scrivere $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$. Possiamo considerare in particolare che $\beta \in (-\pi/2, 0)$, poichè $\beta \to (-\pi/2)^+$. Otteniamo quindi

$$F(\beta) = \int_{\beta}^{0} \frac{(1-\sin^2 x)^{5/2}}{(1+\sin x)^2}\, dx = \int_{\sin\beta}^{0} \frac{(1-t^2)^{5/2}}{(1+t)^2} \frac{1}{(1-t^2)^{1/2}} dt$$

Poichè $-\frac{\pi}{2} < \sin\beta < 0$, abbiamo $1+t > 0$ e $1-t^2 > 0$, quindi l'integranda risulta ben definita. Otteniamo pertanto

$$F(\beta) = \int_{\sin\beta}^{0} \frac{(1-t^2)^2}{(1+t)^2}\, dt = \int_{\sin\beta}^{0} (1-t)^2\, dt \longrightarrow \int_{-1}^{0} (1-t)^2\, dt$$

per $\beta \to -\pi/2$. Concludiamo che l'integrale improprio esiste e si ha

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^5 x}{(1+\sin x)^2}\, dx = -\frac{1}{3}\Big[(1-t)^3\Big]_{t=-1}^{t=0} = -\frac{1}{3}(1-8) = \frac{7}{3}\,.$$