Pisa, 30 Aprile 2014

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Università di Pisa.

Appello Straordinario di Analisi Matematica I. Soluzioni.

Esercizio 1. Si calcoli il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{x^4}{\log(1+\sin x) - \sin\log(1+x)}\,.$$

Soluzione.

Calcoliamo lo sviluppo di Taylor al quarto ordine in $x = 0$ delle funzioni a denominatore:

$$\log(1+\sin x) = \sin x - \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{3}(\sin x)^3 - \frac{1}{4}(\sin x)^4 + o\big((\sin x)^4\big) =$$

$$\Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\Big) - \frac{1}{2}\Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(x + o(x^2)\Big)^3 - \frac{1}{4}\Big(x + o(x^2)\Big)^4 + o(x^4) =$$

$$\Big(x - \frac{x^3}{6}\Big) - \frac{1}{2}\Big(x^2 - \frac{x^4}{3}\Big) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) =$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

Similmente

$$\sin\log(1+x) = \log(1+x) - \frac{1}{6}\big(\log(1+x)\big)^3 + o\Big(\big(\log(1+x)\big)^4\Big) =$$

$$\Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\Big) - \frac{1}{6}\Big(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)^3 + o(x^4) =$$

$$\Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big) - \frac{1}{6}\Big(x^3 - \frac{3}{2}x^4\Big) + o(x^4) =$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Quindi, per $x \to 0$

$$\frac{x^4}{\log(1+\sin x) - \sin\log(1+x)} = \frac{x^4}{-x^4/12 + o(x^4)} = -12 + o(1)\,,$$

e si trova il limite richiesto $\mathbf{-12}$.

Esercizio 2. Si dica se l'integrale improprio
$$\int_0^1 \cos x \left(\log x + \frac{2 \tan x}{x} \right) \log x \, dx$$
è convergente, e nel caso si valuti.

Soluzione.

Per $0 < a < 1$ l'integrando è regolare sull'intervallo $[a, 1]$ e si ha
$$\int_a^1 \cos x \left(\log x + \frac{2 \tan x}{x} \right) \log x \, dx = \int_a^1 \cos x (\log x)^2 \, dx + \int_a^1 \frac{2 \sin x \log x}{x} \, dx$$
integrando per parti il primo integrale si ha
$$\begin{aligned} \sin 1 (\log 1)^2 - \sin a (\log a)^2 - \int_a^1 \frac{2 \sin x \log x}{x} \, dx + \int_a^1 \frac{2 \sin x \log x}{x} \, dx = \\ = - \sin a (\log a)^2 \, . \end{aligned}$$
Facendo il limite per $a \to 0$ si trova quindi il valore $\mathbf{0}$ per l'integrale improprio.

Esercizio 3. Si studi la convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ definita ponendo $c_0 := 0$ e
$$c_{n+1} = e^{-\left(\sum_{k=0}^{n} c_k \right)^2} .$$

Soluzione.

Poiché la serie è a termini positivi, essa o converge a un numero reale $s \in \mathbb{R}$, oppure diverge a $+\infty$. Il primo caso tuttavia non si può dare, perché implica $c_n \to e^{-s^2} > 0$ per $n \to \infty$, contro la condizione necessaria per la convergenza $c_n \to 0$. Si conclude dunque che $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = +\infty$.