Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Terza prova scritta di Analisi Matematica I del 17 Febbraio 2014.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left[(-1)^n \sqrt{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right].$$

Si studi la convergenza semplice e assoluta di tale serie.

Soluzione. Poichè l'arcotangente è una funzione dispari, la successione sommanda a_n può scriversi come segue $a_n = (-1)^n b_n$, dove

$$b_n = \arctan\left(\sqrt{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$$

tende a zero in modo decrescente. Infatti n^{-1} decresce, mentre $\arctan\sqrt{\sin x}$ è una composizione di funzioni crescenti quando sia ristretta all'intervallo $[0, \pi/2]$, il quale contiente tutti gli elementi n^{-1} per $n \geq 1$. Segue che la serie converge per il criterio di Leibniz. Dallo sviluppo della funzione seno nell'origine, il valore assoluto di a_n si scrive come

$$|a_n| = b_n = \arctan\sqrt{\frac{1}{n}\big(1 + o(1)\big)} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\big(1 + o(1)\big)\right).$$

Lo sviluppo nell'origine dell'arcotangente dà infine $|a_n| = n^{-1/2}\big(1 + o(1)\big)$. Poichè la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$ è divergente, dal criterio del confronto si deduce che la serie data non converge assolutamente. Più precisamente avremo n_0 intero positivo tale che $|a_n| \geq n^{-1/2}/2$ per $n \geq n_0$, quindi si ha

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \geq \frac{1}{2}\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-1/2} = +\infty\,.$$

Esercizio 2. Si consideri il seguente integrale improprio

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

e se ne studi la convergenza semplice e assoluta.

Soluzione. Tale integrale risulta convergente se lo sono i due integrali impropri $\int_{-1}^{0} \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x+1}}\, dx$ e $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x+1}}\, dx$. Con il cambiamento di variabile $x+1=t$ e scegliendo $\lambda \in (-1,0)$ consideriamo

$$\int_{\lambda}^{0} \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int_{\lambda+1}^{1} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dt\,.$$

Poichè $(\sin t)/t^{1/2} \to 0$ per $t \to 0$, abbiamo che $(\sin t)t^{-1/2}$ è continua in $(0,1]$, limitata e non negativa, quindi integrabile in senso improprio, ovvero

$$\int_{\lambda+1}^{1} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dt \leq C$$

per ogni $\lambda \in (-1,0)$, dove $C = \sup\{|\sin t|t^{-1/2} : t \in (0,1]\} < +\infty$. Per monotonia esiste ed è limitato il

$$\lim_{\lambda \to -1} \int_{\lambda+1}^{1} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x+1}}\, dx\,.$$

Quindi $\sin(x+1)/\sqrt{x+1}$, che è non negativa in $(-1,0]$, è ivi anche assolutamente integrabile. Per $\mu \in (0,+\infty)$, integrando per parti abbiamo

$$\int_{0}^{\mu} \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int_{1}^{\mu+1} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dx = \cos 1 - \frac{\cos(1+\mu)}{1+\mu} - \frac{1}{2}\int_{1}^{1+\mu} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\, dt\,.$$

Poichè $\int_{1}^{+\infty} |\frac{\cos t}{t^{3/2}}|\, dt \leq \int_{1}^{+\infty} t^{-3/2} dt < +\infty$ segue che $\frac{\cos t}{t^{3/2}}$ è integrabile in senso improprio in $(1,+\infty)$, pertanto esiste il seguente limite

$$\lim_{\mu \to +\infty} \int_{0}^{\mu} \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x+1}}\, dx = \cos 1 - \frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\, dt\,.$$

Concludiamo quindi che l'integrale dato converge semplicemente. Tuttavia tale integrale non converge assolutamente poichè

$$\int_{0}^{\mu} \frac{|\sin(x+1)|}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int_{1}^{\mu+1} \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{t}}\, dt$$

e abbiamo le disuguaglianze

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{t}}\, dt \geq \sum_{k=3}^{\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{t}}\, dt \geq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \int_{0}^{\pi} \sin(t)\, dt = +\infty.$$

L'ultima disuguaglianza proviene dalla periodicità della funzione seno e dalle formule di addizione per la stessa funzione. Infatti con una traslazione

$t = y + (k-1)\pi$ abbiamo

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\, dt = \int_0^{\pi} \sin(y)\, dy = 2\,.$$

Questo conlude quindi che l'integrale dato non converge assolutamente.

Esercizio 3. Sia $\beta \in \mathbb{R}$ e si consideri $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}}{x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+1} & \text{se } 0 < |x| < 1 \\ \beta & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

1) Stabilire se esiste e nel caso determinare β tale che f sia continua.

2) Stabilire se l'orgine è un punto di massimo o minimo locale per f.

Soluzione. Poichè $|\cos x^{-1}| \leq 1$ per ogni $x \neq 0$, abbiamo

$$x\cos(x^{-1}) \to 0 \quad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

quindi dal teorema di cambiamento di variabile nei limiti, poichè poniamo $y = x\cos x^{-1} \to 0$ per $x \to 0$, si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}}{x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+1} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y}{y+1} = 1.$$

Pertanto definendo $\beta = 1$ la f risulta continua nell'origine. Poichè f è continua in $(-1,1) \setminus \{0\}$ in quanto composizione di funzione continue, la scelta $\beta = 1$ implica la continuità di f in tutto l'intervallo $(-1,1)$. Ponendo $y = x\cos x^{-1}$, che è arbitrariamente piccolo per x piccolo, abbiamo

$$\frac{e^y}{1+y} = \frac{1 + y + \frac{y^2}{2}\big(1+o(1)\big)}{1+y} = 1 + \frac{y^2}{2}\Big(1+o(1)\Big) \quad \text{per} \quad y \to 0$$

quindi esiste $\tau \in (0,1)$ tale che

$$\frac{e^y}{1+y} \geq 1 + \frac{y^2}{4} \quad \text{per ogni} \quad y \in (-\tau,\tau)\,.$$

Ciò implica che $f(x) \geq 1 + 4^{-1}x^2\big(\cos(x^{-1})\big)^2 > 1$ per $0 < |x| < \tau$ e inoltre $f(0) = 1$. Ciò prova che l'origine è un punto di minimo locale. Per la precedente disuguaglianza possiamo anche aggiungere che si tratta di un minimo locale stretto.