Complementi di Analisi Matematica.

Corso per la laurea triennale in Fisica.

Dipartimento di Fisica, Università di Pisa, a.a. 2024/2025.

Programma del corso

ELEMENTI DI CALCOLO DIFFERENZIALE NELLO SPAZIO EUCLIDEO. Topologia di $\mathbb{R}^n$: insiemi aperti, chiusi, limitati, illimitati, connessi e compatti. Prodotto scalare, prodotto vettoriale e loro significati geometrici. Funzioni continue: massimi e minimi, permanenza del segno, teorema di Weierstrass e proprietà delle immagini. Funzioni differenziabili: derivata parziale, derivata direzionale, gradiente, differenziale e teorema del differenziale totale. Matrice jacobiana, differenziazione di composizioni di funzioni, sistemi di coordinate sferiche, cilindriche e polari. Spazio duale $(\mathbb{R}^n)^*$, 1-forme differenziali, differenziale come 1-forma differenziale, differenziabilità di ordine superiore, teorema di Schwarz e formule di Taylor.

MASSIMI E MINIMI, LIBERI E VINCOLATI. Massimi e minimi su domini dello spazio euclideo n-dimensionale, punti critici liberi, matrici simmetriche e loro positività, matrice hessiana, criterio di Sylvester, condizioni necessarie e condizioni sufficienti per massimi e minimi locali. Curve, superfici e teorema della funzione implicita. Massimi e minimi vincolati: punti critici vincolati e teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

CAMPI VETTORIALI, 1-FORME DIFFERENZIALI E INTEGRAZIONE LUNGO LE CURVE. Lunghezza di una curva, integrale curvilineo rispetto la lunghezza d'arco. Campi vettoriali: campi irrotazionali, campi conservativi, campi radiali e potenziali. Studio delle 1-forme differenziali chiuse, esatte, loro primitive e loro integrazione curvilinea. Corrispondenza duale tra campi vettoriali e 1-forme differenziali. Curve omotope, insiemi semplicemente connessi, caratterizzazione di campi conservativi e delle 1-forme differenziali esatte su aperti semplicemente connessi.

INTEGRAZIONE SECONDO LEBESGUE. Misura di Lebesgue: sue proprietà elementari, insiemi misurabili secondo Lebesgue, insiemi trascurabili e proprietà "quasi ovunque". Funzioni misurabili secondo Lebesgue, integrale di Lebesgue e confronto con l'integrale di Riemann. Teoremi di Tonelli, di Fubini e teorema di cambiamento di variabile nell'integrale di Lebesgue. Calcoli di integrali tramite coordinate, polari, cilindriche e sferiche, calcoli di volumi e baricentri.

MISURA DI AREA ED ELEMENTI DI ANALISI VETTORIALE. Jacobiano in varie forme equivalenti per mappe da un aperto del piano e a valori nello spazio. Formule dell'area per insiemi parametrizzati, integrale di funzioni su superfici rispetto la misura di area. Punti di frontiera regolari, normale esterna di aperti dello spazio tridimensionale euclideo, flussi di campi vettoriali e teorema della divergenza. Aperti regolari del piano, loro orientazione positiva del bordo e teorema di Gauss-Green. Rotore di un campo vettoriale, superfici elementari con bordo e orientate e teorema di Stokes nello spazio.