***Complementi di Analisi Matematica*.**

Corso per la laurea triennale in Fisica.

Dipartimento di Fisica, Università di Pisa, a.a. 2024/2025.

Programma del corso

ELEMENTI DI CALCOLO DIFFERENZIALE NELLO SPAZIO EUCLIDEO. Topologia di $\mathbb{R}^n$: insiemi aperti, chiusi, limitati, illimitati, connessi e compatti. Prodotto scalare, prodotto vettoriale e loro significati geometrici. Funzioni continue: massimi e minimi, permanenza del segno, teorema di Weierstrass e proprietà delle immagini. Funzioni differenziabili: derivata parziale, derivata direzionale, gradiente, differenziale e teorema del differenziale totale. Spazio duale $(\mathbb{R}^n)^*$, 1-forme differenziali, differenziale come 1-forma differenziale, differenziabilità di ordine superiore, teorema di Schwarz e formule di Taylor. Matrice jacobiana, teorema della funzione inversa, differenziazione di composizioni di funzioni, sistemi di coordinate sferiche, cilindriche e polari.

MASSIMI E MINIMI, LIBERI E VINCOLATI. Massimi e minimi su aperti di $\mathbb{R}^n$: punti critici, matrici simmetriche e loro positività, matrice hessiana, criterio di Sylvester, condizioni necessarie e condizioni sufficienti per massimi e minimi locali. Curve, superfici e teorema della funzione implicita. Massimi e minimi vincolati: punti critici vincolati e teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

CAMPI VETTORIALI, 1-FORME DIFFERENZIALI E INTEGRAZIONE LUNGO LE CURVE. Lunghezza di una curva, integrale curvilineo rispetto la lunghezza d'arco (o di prima specie). Campi vettoriali: campi irrotazionali, campi conservativi, campi radiali e potenziali. 1-forme differenziali: chiuse, esatte, loro primitive e loro integrazione curvilinea (di seconda specie). Corrispondenza duale tra campi vettoriali e 1-forme differenziali. Curve omotope, insiemi semplicemente connessi, caratterizzazione di campi conservativi e delle 1-forme differenziali esatte su aperti semplicemente connessi.

INTEGRAZIONE SECONDO LEBESGUE. Misura di Lebesgue: sue proprietà elementari, insiemi misurabili secondo Lebesgue, insiemi trascurabili e proprietà "quasi ovunque". Funzioni misurabili secondo Lebesgue, integrale di Lebesgue e confronto con l'integrale di Riemann. Teoremi di Tonelli, di Fubini e teorema di cambiamento di variabile nell'integrale di Lebesgue. Calcoli di integrali tramite coordinate, polari, cilindriche e sferiche, calcoli di volumi e baricentri.

MISURA DI AREA ED ELEMENTI DI ANALISI VETTORIALE. Jacobiano in varie forme equivalenti per mappe da un aperto di $\mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{R}^3$. Formule dell'area per insiemi parametrizzati, integrale di funzioni su superfici rispetto la misura di area. Punti di frontiera regolari, normale esterna di aperti in di $\mathbb{R}^3$, flussi di campi vettoriali e teorema della divergenza. Aperti regolari del piano, loro orientazione positiva del bordo e teorema di Gauss-Green. Rotore di un campo vettoriale, superfici elementari con bordo e orientate e teorema di Stokes nello spazio. *Cenni di calcolo differenziale esterno e teorema di Stokes-Cartan.* Quest'ultimo argomento sarà svolto solo se il tempo lo consente, in accordo con gli studenti ed in modo opzionale rispetto al programma d'esame.