TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI, 2009-2010

ALBERTO DE SOLE E ANDREA MAFFEI

5 febbraio 2010

Diario delle lezioni

Lunedì 28 settembre.

- Presentazione del corso.
- Definizione di rappresentazione di un gruppo.

Mercoledì 30 settembre.

- Definizione di sottorappresentazione, omomorfismo di rappresentazioni, rappresentazione quoziente.
- Rappresentazione duale.
- Somma diretta di rappresentazioni.
- Definizione di prodotto tensore di spazi vettoriali.

Venerdì 2 ottobre.

- Base di un prodotto tensoriale.
- Proprietà universale del prodotto tensoriale.
- Prodotto tensoriale di rappresentazioni di un gruppo.
- $V \otimes U^* \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$ per dimensioni finite.
- Definizione di rappresentazione irriducibile.

Lunedì 5 ottobre.

- Teorema di completa riducibilità per le rappresentazioni di un gruppo finito su un campo a caratteristica 0.

Mercoledì 7 ottobre.

- Lemma di Schur: una applicazione $T : V \to W$ tra due rappresentazioni irriducibili è zero o invertibile.
- Corollari del Lemma di Schur:
  a) se V è una rappresentazione irriducibile sul campo $\mathbb{K}$ del gruppo G, allora $\mathrm{End}_G(V)$ è un corpo che continene $\mathbb{K}$ nel suo centro;
  b) se V è una rappresentazione irriducibile complessa di dimensione finita di un gruppo G, allora i soli omomorfismi di G-moduli $T : V \to T$ sono i multipli dell'identità;
  c) sia G un gruppo finito, siano V e W due rappresentazioni irriducibili di G su un campo $\mathbb{K}$, e sia $T : V \to W$ una trasformazione lineare; si consideri $\bar{T} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \circ T \circ g^{-1}$; allora, se $V \not\simeq W$ si ha $\bar{T} = 0$, mentre se $W = V$ si ha $\bar{T} = \frac{\mathrm{Tr}(T)}{\dim(V)}\mathbb{I}$.
- Esempi: rappresentazioni irriducibili reali V di gruppi finiti G tali che $\mathrm{End}_G(V) = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.
- Teoria delle rappresentazioni del gruppo $\mathbb{Z}$.

Venerdì 9 ottobre.

- Definizione del carattere $\chi_V : G \to \mathbb{K}$ di una rappresentazione V di dimensione finita (sul campo $\mathbb{K}$) del gruppo G.
- Prime proprietà dei caratteri:
  a) $\chi_V(1) = \dim(V)$.
  b) χ_V è una funzione di classe.
  c) se $V \simeq W$, allora $\chi_V = \chi_W$.
  d) se V è una rappresentazione finio dimensionale complessa di un gruppo finito G, allora $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$.
- Esempi:
  a) carattere di una rappresentazione di permutazioni V_S;
  b) carattere della rappresentazione regolare V^{reg}.

Lunedì 12 ottobre.

- Altre proprietà dei caratteri: $\chi_{U\oplus V} = \chi_U + \chi_V$, $\chi_{U\otimes V} = \chi_U \chi_V$, $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1})$.
- Unitariet'a delle rappresentazioni reali e complesse: sia G un gruppo finito e sia V una rappresentazione di G di dimensione finita su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$; allora esiste una forma Hermitiana definita positiva G-invariante, e in una base ortonormale le matrici della rappresentazione sono tutte unitarie.
- Corollario: le rappresentazioni reali di un gruppo finito sono autoduali.

Mercoledì 14 ottobre.

- Definizione del prodotto Euclideo nello spazio delle funzioni di classe $\mathcal{C}(G)$.
- Teorema di ortonormalità dei caratteri: se G è un grupo finito, allora i caratteri delle rappresentazioni irriducibili complesse di dimensione finita formano una base ortonormale dello spazio $\mathcal{C}(G)$.
- Corollari:
  a) V è irriducibile se e solo se $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$;
  b) data una qualunque rappresentazione non nulla, $\langle \chi_V, \chi_V \rangle$ è un intero positivo;
  c) il numero di rappresentazioni irriducibili complesse (a meno di isomorfismi) è pari al numero di classi di coniugio di G;
  d) sia V una rappresentazione di G e siano $S_1, \dots, S_h$ le sue rappresentazioni irriducibili; abbiamo $V \simeq S_1^{\oplus \langle \chi_1, \chi_V \rangle} \oplus \cdots \oplus S_h^{\oplus \langle \chi_h, \chi_V \rangle}$.
- Esempi:
  a) Tavola dei caratteri di S_3.
  b) Tavola dei caratteri di $\mathbb{Z}/n$.

Venerdì 16 ottobre.

- Decomposizione della rappresentazione regolare: $V^{\mathrm{reg}} \simeq S_1^{\oplus d_1} \oplus \cdots \oplus S_h^{\oplus d_h}$.
- Formula delle dimensioni delle rappresentazioni irriducibili complesse: $d_1^1 + \cdots + d_h^2 = |G|$.
- Esempio: rappresentazioni irriducibili complesse del gruppo diedrale D_n.
- Decomposizione canonica di una rappresentazione in componenti isotipiche: $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_h$, dove $V_i \simeq S_i^{\oplus \langle \chi_i, \chi_V \rangle}$; operatore di proiezione $\pi_i : V \to V_i$ sulla i-sima componente isotipica: $\pi_i = \frac{d_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \rho^V(g)$.

Lunedì 19 ottobre.

- Isomorfismo canonico di G-moduli $\mathrm{Hom}_G(S, V) \otimes S \simeq V_S$, dove S è un G-modulo irriducibile e V_S è la componente isotipica di V associata a S.
- Corollario: fissare una decomposizione $V_S \simeq S^{\oplus m}$ corrisponde a fissare una base di $\mathrm{Hom}_G(S, V)$.

Mercoledì 21 ottobre.

- Rappresentazioni del gruppo prodotto $H \times K$:
  a) rappresentazione $U \otimes V$ di $H \times K$, dove U è una rappresentazione di H e V è una rappresentazione di K;
  b) carattere: $\chi_{U \otimes V}(h, k) = \chi_U(h)\chi_V(k)$;
  c) le rappresentazioni irriducibili sono esattamente le $S = U \otimes V$, dove U è un H-modulo irriducibile e V è un K-modulo irriducibile.
- Restrizione di una rappresentazione da un gruppo G ad un sottogruppo $H \subset G$.
- Definizione di rappresentazione indotta: data una rappresentazione V di G ed un sottospazio U invariante rispetto all'azione di $H \subset G$, diciamo che V è indotta da U se $V = \bigoplus_{\gamma = gH \in G/H} gU$. Notazione: $V = \mathrm{Ind}_H^G(U)$.
- Esempi: $\mathbb{C}[G/H] = \mathrm{Ind}_H^G(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}[G] = \mathrm{Ind}_H^G(\mathbb{C}[H])$.
- Costruzione della rappresentazione indotta: $\mathrm{Ind}_H^G(U) = \{f : G \to U \mid f(hg) = h \cdot f(g)\}$.
- Proprietà universale della rappresentazione indotta.
- Unicità della rappresentazione indotta.

Venerdì 23 ottobre.

- Carattere della rappresentazione indotta: $\chi_{\mathrm{Ind}_H^G(U)}(g) = \dfrac{1}{|H|} \displaystyle\sum_{x^{-1}gx \in H} \chi_U(x^{-1}gx)$
- Isomorfismo di $G \times G$-moduli e di algebre $\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{S:\ \text{irrid.}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$, dato da: $G \ni g \mapsto \oplus_S \rho^S(g)$ e $\mathrm{End}(S) \ni T_S \mapsto \frac{d_S}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}_S(T_S \rho^S(g^{-1}))g$.
- Lemma: $\sum_S \frac{c(g)}{|G|} \overline{\chi_S(x)} \chi_S(y)$ è 1 se x e y sono nella stessa classe di coniugio, e 0 altrimenti.

Lunedì 26 ottobre.

- Centro dell'algebra gruppo.
- Proprietà di integralità dei caratteri.
- La dimensione di una rappresentazione irriducibile di G divide la cardinalità di G.

Mercoledì 28 ottobre.

- Moduli su un anello. Sottomoduli, quozienti, somme dirette.
- Moduli e anelli semisemplici.
- Lemma: Se $M = \sum_{i \in I} S_i$ con S_i moduli semplici e N un sottomodulo di M allora esiste $J \subset I$ tale che $M = N \oplus \bigoplus_{j \in J} S_j$.

Venerdì 30 ottobre.

- Proposizione: un anello è semisemplice se e solo se per ogni modulo M e per ogni sottomodulo N di M esiste un sottomodulo complementare a N.
- Lemma di Schur.
- Omomorfismi tra moduli semisemplici.

Lunedì 2 novembre.

- Anelli di matrici e Teorema di Wedderburn

Mercoledì 4 novembre.

- Radicale di un modulo.
- Lemma se $\varphi : M \longrightarrow N$ the $\varphi(\mathrm{rad}(M)) \subset \mathrm{rad}(N)$.
- (Lemma di Nakayama) Sia J il radicale dell'anello A e sia M un A modulo finitamente generato. Se $JM = M$ allora $M = 0$.
- Sia A una $\Bbbk$-algebra finito dimensionale su $\Bbbk$. Allora A è semisemplice se e solo se non ha ideali nilpotenti.

Venerdì 6 novembre.

- idempotenti primitivi
- partizioni, diagrammi di Young e tableaux
- antisimmetrazzatori di Young associati ad un tableau: $s_T, a_T, c_T = s_T a_T$.

Lunedì 9 novembre.

- Lemmi sugli antisimmetrizzatori di Young.

Mercoledì 11 novembre.

- Costruzione delle rappresentazioni irriducibili M_λ di S_n con gli antisimmetrizzatori di Young.

Venerdì 13 novembre.

- esempi di costruzioni di rappresentazioni irriducibili con gli antisimmetrizzatori di Young.
- rappresentazione di permutazione $P_\lambda = \mathbb{C}[S_n/S_\lambda]$, ed individuazione di M_λ come sottorappresentazione di P_λ.

Lunedì 16 novembre.

- Tabloids e costruzione di una base per i moduli irriducibili del gruppo simmetrico.

Mercoledì 18 novembre.

- Dimostrazione che gli elementi costruiti lunedì sono una base

Venerdì 20 novembre.

- restrizione di una rappresentazione irriducibile di S_n a S_{n-1}

Lunedì 23 novembre.

- Polinomi simmetrici

Mercoledì 25 novembre.

- Polinomi di Schur e formula di Cauchy

Venerdì 27 novembre.

- Espansione dei polinomi di Newton in polinomi di Schur e caratteri delle rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico

Lunedì 30 novembre.

- Fine della dimostrazione del teorema enunciato venerdì .

Mercoledì 2 dicembre.

- Formula degli uncini per la dimensione di una rappresentazione irriducibile del gruppo simmetrico.

Venerdì 4 dicembre.

- Dualità di Tannaka.

Lunedì 7 dicembre.

- Cenni sulla costruzione geometrica delle rappresentazioni del gruppo simmetrico: parametrizzazione delle componenti irriducibili della fibra di Springer.

Mercoledì 9 dicembre.

- Introduzione alla teoria delle rappresentazioni del gruppo $GL(V)$.
- Azione di S_n e di $GL(V)$ su $V^{\otimes n}$.
- Prodotto simmetrico $\Sigma_n(V) \subset V^{\otimes n}$ e prodotto antisimmetrico $A_n(V) \subset V^{\otimes n}$.

Venerdì 11 dicembre.

- Proposizione: $\Sigma_n(V) = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{v \otimes \cdots \otimes v \,|\, v \in X\}$, se $X \subset V$ è un sottoinsieme Zariski denso.
- Teorema: Sia A l'algebra associativa generata dagli operatori $\sigma \in S_n$ che agiscono su $V^{\otimes n}$, e sia B l'algebra associativa degli operatori $g \in GL(V)$ che agiscono su $V^{\otimes n}$. Allora $B = \mathrm{End}_A(V)$.

Lunedì 14 dicembre.

- Proposizione: $V^{\otimes n}$, vista come rappresentazione di $S_n \otimes GL(V)$, ammette la seguente decomposizione come somma diretta di irriducibili:
$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{|\lambda|=n} M_\lambda \otimes S_\lambda(V)\,,$$
dove le $S_\lambda(V)$ diverse da zero sono tutte le rappresentazioni irriducibili di $GL(V)$ che appaiono in $V^{\otimes n}$.
- Una costruzione esplicita della rappresentazione (zero o) irriducibile $S_\lambda(V)$ di $GL(V)$ è data da:
$$S_\lambda(V) = c_T(V^{\otimes n})\,,$$
dove T è un tableau di forma λ e $c_T = s_T a_T$.

Mercoledì 16 dicembre.

- Proposizione: $S_\lambda(V)$ è non zero se e solo se $ht(\lambda) \leqslant m = \dim(V)$.

Venerdì 18 dicembre.

- Teorema:
  (1) il carattere di $V^{\otimes n}$ vista come rappresentazione di $S_n \times GL(V)$ è:
  $$\chi_{V^{\otimes n}}(\sigma, X) = P_\mu(x_1, \dots, x_m)\,,$$
  dove μ è la partizione di n associata alla decomposizione in cicli di $\sigma \in S_n$, $x_1, \dots, x_m$ sono gli autovalori, contati con molteplicita', di $X \in GL(V)$, e P_μ denota il polinomio simmetrico di Newton.

(2) il carattere di $S_\lambda(V)$ vista come rappresentazione di $GL(V)$ è:

$$\chi_{S_\lambda(V)}(X) = S_\lambda(x_1, \ldots, x_m)\,,$$

dove $x_1, \ldots, x_m$ sono gli autovalori, contati con molteplicita', di $X \in GL(V)$ e S_λ denota il polinomio simmetrico di Schur.

- Formula per la dimensione della rappresentazione $S_\lambda(V)$:

$$\dim S_\lambda(V) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \frac{\lambda_i - \lambda_j - i + j}{j - i}\,.$$

- Interpretazione in teoria delle rappresentazioni della formula di Cauchy: se $m = \dim(U) \leqslant \dim(V)$, allora abbiamo la decomposizione come $GL(U) \times GL(V)$-moduli

$$S^{\cdot}(U \otimes V) = \bigoplus_{ht(\lambda) \leqslant m} S_\lambda(U) \otimes S_\lambda(V)\,.$$

Esercizi settimanali

I settimana

La soluzione scritta di almeno tre problemi (a scelta) deve essere consegnata ai docenti Venerdì 9 Ottobre, a lezione.

Esercizio 1. Si consideri il gruppo S_3 e la sua rappresentazione usuale sullo spazio $V = \mathbb{C}^3$.

a) Si dimostri che $U_1 = \mathbb{C}\,(1,1,1) \subset V$ è una sottorappresentazione irriducibile di dimensione 1.
b) Si dimostri che $U_2 = \{(x,y,z) \in V \,:\, x+y+z=0\}$ è una sottorappresentazione di V di dimensione 2.
c) Si dimostri che U_2 è irriducibile.
d) Si dimostri che U_1 e U_2 sono sottorappresentazioni complementari in V ovvero che $V \simeq U_1 \oplus U_2$ come rappresentazioni di S_3.

Esercizio 2. Per ogni campo $\mathbb{k}$ definiamo $B_2(\mathbb{k})$ come il gruppo delle matrici invertibili 2×2 triangolari superiori con elementi in $\mathbb{k}$. Poiché $B_2(\mathbb{k})$ è un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{k})$, lo spazio vettoriale $V = \mathbb{k}^2$ è in modo naturale una rappresentazione di $B_2(\mathbb{k})$.

a) Dimostrare che $U = \mathbb{k}\,(1,0) \subset V$ è una sottorappresentazione irriducibile di dimensione 1.
b) Dimostrare che non esistono altre sottorappresentazioni non banali di V.

NOTA: questo esercizio esibisce un esempio di rappresentazione non isomorfa ad una somma diretta di rappresentazioni irriducibili.

Esercizio 3. Siano U, V, W spazi vettoriali.

a) Dimostrare che $U \otimes (V \otimes W)$ e $(U \otimes V) \otimes W$ soddisfano la proprietà universale del prodotto tensore triplo $U \otimes V \otimes W$.
b) Dimostrare l'unicità (a meno di isomorfismo unico) del prodotto tensore triplo $U \otimes V \otimes W$.
c) Dedurre la proprietà associativa del prodotto tensoriale.

Esercizio 4. Siano U, V, U', V' spazi vettoriali e $A : U \longrightarrow U'$, $B : V \longrightarrow V'$ due applicazioni lineari.

a) Dimostrare, usando la proprietà universale, che esiste una unica applicazione lineare, che indicheremo con $A \otimes B$, tra $U \otimes V$ e $U' \otimes V'$ tale che $(A \otimes B)(u \otimes v) = A(u) \otimes B(v)$.
b) Supponiamo adesso che $U' = U$, $V' = V$ e che A e B siano diagolizzabili con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ e $\mu_1, \dots, \mu_n$ rispettivamente. Dimostrare che $A \otimes B$ è diagonalizzabile e calcolarne gli autovalori.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Si consideri l'applicazione lineare $T : V \otimes V^* \longrightarrow \mathbb{k}$ definita da $T(v \otimes f) = f(v)$. Descrivere l'applicazione da $\mathrm{End}(V)$ in $\mathbb{k}$ corrispondente a T tramite l'isomorfismo canonico $V \otimes V^* \simeq \mathrm{End}(V)$.

II settimana

La soluzione scritta di almeno tre problemi (a scelta) deve essere consegnata ai docenti Venerdì 16 Ottobre, a lezione.

Esercizio 6. Dimostrare l'inverso del Lemma di Schur: se G è un gruppo finito e V è una rappresentazione di G su un campo $\mathbb{K}$ con caratteristica zero tale che $\mathrm{End}_G(V)$ è un corpo, allora V è una rappresentazione irriducibile.

Esercizio 7. Si consideri la rappresentazione di S_3 sullo spazio $V = \mathbb{K}^3$ e le sue sottorappresentazioni $U_1 = \mathbb{K}(1,1,1)$ e $U_2 = \{(x,y,z) \,|\, x+y+z=0\}$ (come nell'esercizio 1). Si calcolino i caratteri χ_V, χ_{U_1}, χ_{U_2} e si verifichi che $\chi_V = \chi_{U_1} + \chi_{U_2}$.

Esercizio 8.
a) Sia $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ un'estensione di campi. Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{F}$. Dimostrare che se $\mathbb{K}$ è una estensione finita di campi allora c'è un isomorfismo canonico di spazi vettoriali $Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{F}} V, \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{F}} W) \simeq \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{F}} Hom_{\mathbb{F}}(V, W)$.
b) Dimostrare che, se $W = V$, l'isomorfismo nel punto (a) è un isomorfismo di algebre.

Esercizio 9.
a) Sia V una rappresentazione irriducibile reale del gruppo finito G e si consideri la corrispondente rappresentazione complessa $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$. Si dimostri che se $\mathrm{End}_G(V) \simeq \mathbb{R}$, allora $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ è irriducibile come rappresentazione complessa, mentre se $\mathrm{End}_G(V) \simeq \mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$, allora $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ non è irriducibile.
b) In particolare, dimostrare che se $\mathrm{End}_G(V) \simeq \mathbb{C}$ allora $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ è somma di due rappresentazioni irriducibili complesse non isomorfe, mentre se $\mathrm{End}_G(V) \simeq \mathbb{H}$ allora $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ è somma di due volte la stessa rappresentazione irriducibile complessa.

(Suggerimento: potrebbe essere utile usare i risultati dell'esercizio precedente.)

Esercizio 10. Sia K un corpo che estende il campo $\mathbb{C}$ in modo tale che $\mathbb{C}$ è nel centro di K (ovvero: K è una $\mathbb{C}$-algebra).
a) Dimostrare che se K ha dimensione finita come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, allora $K = \mathbb{C}$.
b) Dimostrare che se K ha dimensione numerabile come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, allora $K = \mathbb{C}$.

III settimana

La soluzione scritta di almeno tre problemi (a scelta) deve essere consegnata ai docenti Venerdì 23 Ottobre, a lezione.

Esercizio 11. $G \times G$ agisce su $\mathbb{C}[G]$ per moltiplicazione destra e sinistra: $(g,h) \cdot x = gxh^{-1}$. Calcolare il carattere di $\mathbb{C}[G]$ come $G \times G$ modulo

Esercizio 12. Si calcoli la tavola dei caratteri (irriducibili, complessi, di dimensione finita) del gruppo S_4.

Esercizio 13.
a) Se G agisce su X, sia V_X la rappresentazione di permutazioni complessa associata e sia χ_X il suo carattere. Dimostrare che $\langle 1, \chi_X \rangle$ è uguale al numero di orbite dell'azione di G su X.
b) Il gruppo G agisce sul prodotto cartesiano $X \times X$ tramite $g(x,y) = (gx, gy)$. Dimostrare che $V_{X\times X} \simeq V_X \otimes V_X$.

Esercizio 14. Sia G un gruppo finito che agisce su un insieme finito X con almeno due elementi. Diciamo che l'azione di G su X è *doppiamente transitiva* se dati comunque $x, y, x', y' \in X$ con $x \neq y$ e $x' \neq y'$, esiste $g \in G$ tale che $x' = gx$ e $y' = gy$. Dimostrare che le seguenti proprietà sono euivalenti:
a) l'azione di G su X è doppiamente transitiva;

b) l'azione di G su $X \times X$ ha esattamente due orbite: la diagonale ed il complementare;
c) se χ_X è il carattere della rappresentazione di permutazioni di X, allora $\langle 1, \chi_X^2 \rangle = 2$;
d) V_X decompone come $V_X \simeq \mathbb{C} \oplus \theta$, con θ sottorappresentazione irriducibile.

Esercizio 15. Sia V una rappresentazione irriducibile finito dimensionale su $\mathbb{R}$ di un gruppo finito G e sia $W = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ la complessificazione della rappresentazione. Ricordiamo, dall'esercizio 9, che se $\mathrm{End}_{\mathbb{R},G}(V) \simeq \mathbb{R}$, allora W è irriducibile, se $\mathrm{End}_{\mathbb{R},G}(V) \simeq \mathbb{C}$ allora $W \simeq W_1 \oplus W_2$ è somma di due rappresentazioni irriducibili complesse non isomorfe, mentre se $\mathrm{End}_{\mathbb{R},G}(V) \simeq \mathbb{H}$ allora $W \simeq W_1 \oplus W_1$ è somma di due volte la stessa rappresentazione irriducibile complessa. Dimostrare che:

a) se $\mathrm{End}_{\mathbb{R},G}(V) \simeq \mathbb{R}$, allora $W \simeq W^*$;
b) se $\mathrm{End}_{\mathbb{R},G}(V) \simeq \mathbb{H}$, allora $W_1 \simeq W_1^*$;
c) se $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R},G}(V) \simeq \mathbb{C}$ allora $W_1^* \simeq W_2$.

IV settimana

La soluzione scritta di almeno tre problemi (a scelta) deve essere consegnata ai docenti Venerdì 30 Ottobre, a lezione.

Esercizio 16. Sia V ua rappresentazione complessa del gruppo finito G tale che $\chi_V(g) = 0$ se $g \neq 1$. Dimostrare che $V \simeq \mathbb{C}[G]^{\oplus n}$ per qualche n intero non negativo.

Esercizio 17. a) Dato uno spazio vettoriale complesso V, consideriamo lo spazio $V \otimes V$ ed i sottospazi $S^2V = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{u \otimes v + v \otimes u\} \subset V^{\otimes 2}$ e $\Lambda^2 V = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{u \otimes v - v \otimes u\} \subset V^{\otimes 2}$. Dimostrare che, se V è una rappresentasione di G, allora S^2V e $\Lambda^2 V$ sono stabili rispetto all'azione di G e vale la formula dei caratteri:

$$\chi_{S^2V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)).$$

Trovare l'analoga formula per il carattere di $\Lambda^2 V$.

b) Si consideri il gruppo S_4 e la sua rappresentazione standard sullo spazio $\mathbb{C}^4$, ottenuta permutando le coordinate. Si trovi la decomposizione di $\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4$ come somma diretta di componenti irriducibili. Dire quali di queste componenti sono in $S^2(\mathbb{C}^4)$ e quali sono in $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$.

Esercizio 18. Siano S, S' rappresentazioni irriducibili complesse del gruppo finito G. Dimostrare le seguenti formule:

a) Se $S \not\simeq S'$ allora per ogni $x \in G$

$$\sum_{g \in G} \overline{\chi_S(g)} \chi_{S'}(gx) = 0;$$

b) Inoltre per $S = S'$ e per ogni $x \in G$

$$\frac{\dim S}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_S(g)} \chi_S(gx) = \chi_S(x).$$

Esercizio 19. Sia H un sottogruppo di un gruppo finito G. Sia U una rappresentazione di H, sia W una rappresentazione di G e denotiamo W_H la restrizione di W ad una rappresentazione di H.

a) Dimostrare che $\mathrm{Hom}_H(U, W_H) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G(U), W)$;

b) Descrivere esplicitamente l'isomorfismo al punto a) se identifichiamo $\mathrm{Ind}_H^G(U) = \{f : G \longrightarrow U \,:\, f(hg) = h \cdot f(g)\}$.

Esercizio 20. Osservare che $V = \{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\}$ è un sottogruppo normale di S_4. Usare questo fatto per costruire la rappresentazione irriducibile di dimensione 2 di S_4.

V settimana

La soluzione scritta di tre problemi (a scelta) deve essere consegnata ai docenti venerdì 6 novembre, a lezione.

Esercizio 21. Descrivere tutti i moduli irriducibili dei seguenti anelli

$$A = \mathbb{C}[x,y] \quad B = \frac{\mathbb{C}[x,y]}{(x^2+y^2-1)}.$$

Esercizio 22. Descrivere gli ideali sinistri, destri e bilateri e i moduli irriducibili dell'anello $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z})$.

Esercizio 23. Sia A un'algebra associativa semisemplice (sinistra). Mostrare che A non ha ideali nilpotenti.

Esercizio 24. Sia $E \subset F$ una estensione di campi di caratteristica 0 e G un gruppo finito. Sia m il numero delle rappresentazioni irriducibili di G su E a meno di isomorfismo e n il numero delle rappresentazioni irriducibili di G su F a meno di isomorfismo.

i) Mostrare che $m \leqslant n$.
ii) Siano $d_1, \dots, d_m$ le dimensioni come E spazi vettoriali delle rappresentazioni irriducibili su E. Mostrare che se $\sum_{i=1}^m d_i^2 = |G|$ allora $m = n$.

Esercizio 25. Se W è una rappresentazione del gruppo finito G su $\mathbb{C}$ indichiamo con $W|_\mathbb{R}$ la stessa rappresentazione considerata come spazio vettoriale reale. Questa operazione si chiama restrizione degli scalari.

(1) Se W è irriducibile allora $W|_\mathbb{R}$ è somma al massimo di due rappresentazioni irriducibili reali.
(2) Se W è irriducibile e $W^* \not\simeq W$ allora $W_\mathbb{R}$ è irriducibile.
(3) Se W è irriducibile e $W^* \simeq W$ descrivere delle condizioni su W tali che $W_\mathbb{R}$ è irriducibile e delle condizioni per le quali è riducibile.

VI settimana

La soluzione scritta di tre problemi (a scelta) deve essere consegnata ai docenti venerdì 6 novembre, a lezione.

Esercizio 26. Sia A una $\mathbb{k}$-algebra associativa di dimensione finita su $\mathbb{k}$. Se $a \in A$ si consideri l'applicazione $\mathbb{k}$-lineare $L_a : A \longrightarrow A$ definita da $L_a(b) = ab$. Sia β la forma bilineare su $\mathbb{k}$ definita da $\beta(a;b) = \mathrm{Tr}(L_a \circ L_b)$.

Si mostri che se $A = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{k})$ allora $\beta(a;b) = n\ \mathrm{Tr}(ab)$.

Esercizio 27. Sia $A = \mathrm{Mat}(n \times n)$. Quali sono le matrici diagonali che sono idempotenti primitivi di A?

Esercizio 28. Sia A una $\mathbb{C}$-algebra associativa di dimensione finita su $\mathbb{C}$. Dimostrare che A è semisemplice se e solo se la forma bilineare β definita nell'esercizio precedente è non degenere. [Lo stesso risultato vale per $\Bbbk$ di caratteristica zero qualsiasi].

Esercizio 29. Sia M un gruppo abeliano e sia $A \subset \mathrm{End}(M)$ un sottoanello, M acquisisce quindi una struttura di A modulo mediante $a \cdot m = a(m)$. Si assuma che M sia finitamente generato come $B = \mathrm{End}_A(M)$ modulo.

i) Si dimostri che M è un A modulo semisemplice se e solo se A è un anello semisemplice.
ii) Si assuma che M sia semisemplice (e quindi nelle nostre ipotesi somma finita di moduli semplici) e sia $B = \mathrm{End}_A(M)$. Si dimostri che B è semisemplice e che $\mathrm{End}_B(M) = A$. [Si proceda come nella dimostrazione del teorema di Wedderburn].

Esercizio 30.

i) Sia A una $\mathbb{C}$ sottoalgebra di $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$. Si assuma che per ogni $v \neq 0$ in $\mathbb{C}^n$ sia $Av = \mathbb{C}^n$. Allora $A = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$.
ii) La stessa cosa è vera se al posto di $\mathbb{C}$ si prende $\mathbb{R}$?

VII settimana

La soluzione scritta di tre problemi (a scelta) deve essere consegnata ai docenti venerdì 20 novembre, a lezione.

Esercizio 31. Sia x un idempotente di A e M un A modulo. Mostrare che $\mathrm{Hom}_A(Ax, M) \simeq xM$.

Esercizio 32. Sia $A = \mathbb{C}[S_n]$, λ una partizione di n e T un tableau di forma λ. Definiamo $P_\lambda = \mathbb{C}[S_n]s_T$ e $Q_\lambda = \mathbb{C}[S_n]a_T$.

i) Dimostrare che se M_μ compare in Q_λ allora $\mu \leqslant \lambda$.
ii) Dimostrare che M_λ è l'unica rappresentazione irriducibile che compare sia in P_λ che in Q_λ.

Esercizio 33. Sia λ una partizione di n e sia λ^t la partizione di n ottenuta considerando la lunghezza delle colonne del tableau associato a λ [Per esempio se λ è la partizione $5,4,4$ la sua trasposta è $3,3,3,3,1$]. Sia $\mathbb{C}_\varepsilon$ la rappresentazione segno di S_n. Dimostrare che

$$M_{\lambda^t} \simeq \mathbb{C}_\varepsilon \otimes M_\lambda.$$

Esercizio 34. Sia $A = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$. Si dimostri che una matrice $X = (x_{ij}) \in A$ è un idempotente primitivo se e solo se $X^2 = X$ e $x_{ih}x_{jk} - x_{ik}x_{jh} = 0$ per ogni i, j.

Esercizio 35. Siano λ e μ due partizioni di n diciamo che $\lambda \geqslant_d \mu$ se e solo se per ogni i

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geqslant \mu_1 + \cdots + \mu_i.$$

Questa relazione definisce una relazione di ordine parziale tra le partizioni di n. Si dimostri che $\lambda \geqslant_d \mu$ se e solo se $\mu^t \geqslant_d \lambda^t$.

VIII settimana

La soluzione scritta di tre problemi (a scelta) deve essere consegnata ai docenti venerdì 27 novembre, a lezione.

Esercizio 36. Si determini la dimensione di tutte le rappresentazioni di S_n per n minore o uguale a 6.

Esercizio 37. Al variare di n si determino tutte le rappresentazioni di S_n di dimensione minore o uguale a n.

Esercizio 38.

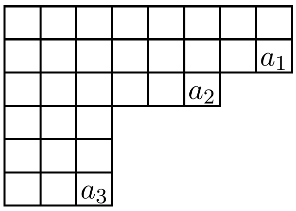
i) Si calcoli il carattere della rappresentazione naturale $\mathbb{C}^n$ di S_n.
ii) Si calcoli il carattere dei prodotti esterni della rappresentazione naturale di $\mathbb{C}^n$: $\Lambda^2\mathbb{C}^n$ e $\Lambda^3\mathbb{C}^n$ di S_n.

[Si intende questo: data una permutazione σ che è il prodotto di h_1 1-cicli, h_2 2-cicli, etc si esprima il carattere delle rappresentazioni in questione sull'elemento σ come funzione degli h_i].

Esercizio 39. Sia λ una partizione di n e χ il carattere di S_n della rappresentazione P_λ. Si dimostri che se σ è una permutazione che ha decomposizione in cicli di lunghezza $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ allora $\chi(\sigma)$ è il coefficiente di x^λ nel polinomio:

$$\prod_{i=1}^{r}(x_1^{\mu_i} + \cdots + x_n^{\mu_i}).$$

Esercizio 40. Sia λ una partizione di n e siano a_1, a_2, ... , a_r gli "angoli" del diagramma associato a λ numerati dall'alto in basso o equivalentemente da destra a sinistra.



[Si ringrazia il Carderi per l'aiuto con i diagrammi.]
Sia j_h la colonna dell'angolo a_h e sia ℓ_h la sia lunghezza.
Si considerino i seguenti sottospazi della rappresentazione N_λ:

$$\begin{aligned}
U_i &= \langle e_T \ : T \text{ è standard di forma } \lambda \text{ e } n \text{ è in uno degli angolo } a_1, \ldots, a_i\rangle \\
V_i &= \langle e_T \ : T \text{ di forma } \lambda \text{ e } n \text{ è in uno degli angolo } a_1, \ldots, a_i\rangle \\
W_r &= \langle e_T \ : T \text{ di forma } \lambda \text{ e la colonna in cui appare } n \text{ è } \geqslant r\rangle \\
X_i &= W_{j_i}
\end{aligned}$$

Osserviamo che l'algoritmo di raddrizzamento implica che:

i) W_r è stabile per l'azione di S_{n-1};
ii) $X_i = V_i = U_i$.

Sia $N_i = U_i/U_{i-1}$ e sia $\mu^{(i)}$ la partizione associata al diagramma che si ottiene rimuovendo l'angolo a_i.

Come rappresentazioni di S_{n-1} abbiamo il seguente isomorfismo:

$$N_i \simeq N_{\mu^{(i)}}.$$

Per esempio, possiamo procedere nel seguente modo: sia T' di forma $\mu^{(i)}$ e T sia ottenuto da T' aggiungendo n nell'angolo a_i allora se I è l'insieme di numeri che compaiono nella riga di T che contiene la casella a_i e $\tilde{s} = \sum_{i \in I}(in)$ possiamo verificare che

iii) $c_T \gamma_T = \sharp(C_{T'})!\, \tilde{s}\, c_{T'}\, \gamma_T$.

Da questa formula possiamo dedurre che

iv) $c_{T'} U_i \neq 0$ e $N_\lambda \simeq \bigoplus N_{\mu^{(i)}}$.

[NOTA: l'esercizio consiste nel leggere con attenzione quello che c'è scritto e di verificare una affermazione a scelta. Non verrà corretto in classe ma potete venire a ricevimento. Chi poi si fosse proprio appassionato puo' provare ad affrontare la sequente variante cosa succede se aggiungo due caselle alla volta: quella di $n-1$ e quella di n e voglio studiare la restrizione come $S_{n-2} \times S_2$ modulo?]

IX settimana

La soluzione scritta di due problemi (a scelta) deve essere consegnata venerdì 4 dicembre, a lezione.

Esercizio 41. Si scriva una formula per i polinomi di Schur in una e due variabili.

Esercizio 42. Se $\lambda = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ è una partizione l'altezza $\mathrm{alt}(\lambda)$ di λ è definita come il massimo i tale che $\lambda_i \neq 0$.

Se n è un intero fissato e $\mathrm{alt}(\lambda) \leqslant n$ abbiamo definito il polinomio di Schur S_λ in n variabili, che in questo esercizio indicheremo con $S_\lambda^{(n)}$ per sottolineare il fatto che si tratta del polinomio di Schur per n variabili. Siano ora $m, \mathrm{alt}(\lambda) < n$. Dimostrare che

i) se $\mathrm{alt}(\lambda) > m$ allora $S_\lambda^{(n)}(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) = 0$;
ii) se $\mathrm{alt}(\lambda) < m$ allora $S_\lambda^{(n)}(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) = S^{(m)}(x_1, \ldots, x_m)$.

Esercizio 43. Sia $E(t) = \prod_{i=1}^n (1 + tx_i)$ e sia $P(t) = \sum_{r \geqslant 1} p_r(x) t^{r-1}$.

i) Mostrare che $P(-t) = \frac{E'(t)}{E(t)}$;
ii) Ricavare dalla formula precedente

$$e_r = -\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} (-1)^i p_i e_{r-i}$$

dove $e_0 = 1$;

iii) Mostrare che $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_n$ l'insieme dei polinomi simmetrici a coefficienti razionali è l'algebra dei polinomi in $p_1, \ldots, p_n$: $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots, p_n]$;

Esercizio 44. Si calcolino le tabelle dei caratteri del gruppo delle unità dei quaternioni e del gruppo delle isometrie di un quadrato.

Esercizio 45. [Questo esercizio è un po' lungo ma non è per niente difficile: negli esercizi della prossima settima ci sarà la seconda puntata] Se M_n è una successione di gruppi abeliani e se per ogni $n > m$ è definita una applicazione $\varphi_{n,m} : M_n \longrightarrow M_m$ tale che $\varphi_{m,\ell}\varphi_{n,m} = \varphi_{n,\ell}$ il limite inverso o proiettivo della successione M_n (e delle mappe $\varphi_{n,m}$) è definito nel seguente modo:

$$M = \varprojlim M_n = \{(a_n)_{n\geqslant 0} \,:\, a_n \in M_n \text{ e } \varphi_{n,m}(a_n) = a_m \text{ per ogni } n > m\}.$$

Per ogni n è quindi definita una mappa $\varphi_n : M \longrightarrow M_n$ data dalla proiezione sull'ennesima componente che è un morfismo di gruppi abeliani con la somma componente per componente su M.

i) Si dimostri che M soddisfa la seguente proprietà universale: per ogni N e per ogni succesione $\psi_n : N \longrightarrow M_n$ tale che $\psi_m = \varphi_{n,m}\psi_n$ esiste ed è unico $\psi : N \longrightarrow M$ tale che $\psi_n = \varphi_n\psi$;

Si consideri ora $M_n^k = \Lambda_n^k$ l'insieme dei polinomi simmetrici omogenei di grado k in n variabili a coefficienti in $\mathbb{Z}$ e $\varphi_{n,m}$ definita nel seguente modo:

$$\varphi_{n,m}(f)(x_1, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0);$$

sia Λ^k il limite inverso dei Λ_n^k e $\Lambda = \bigoplus_k \Lambda^k$.

ii) Si dia a Λ una struttura di anello graduato in modo che le mappe $\varphi_n = \bigoplus \varphi_n^k$ siano di anelli;
iii) Si dimostri che è possibili definire un elemento S_λ di Λ tale che $\varphi_n(S_\lambda) = S_\lambda^{(n)}$;
iv) Si dimostri che è possibile definire un elemento e_i di Λ tale che $\varphi_n(e_i) = e_i^{(n)}$;
v) Si dimostri che l'insieme degli S_λ al variare di tutte le partizioni λ (cioè non di lunghezza limitata) è una base di Λ come $\mathbb{Z}$ modulo;
vi) Si dimostri che Λ è l'anello dei polinomi in $e_1, e_2, \dots$;
vii) Sarebbe stato uguale se avessimo definito Λ direttamente come il limite inverso dei Λ_n?

X settimana

La soluzione scritta di due problemi (a scelta) deve essere consegnata venerdì 11 dicembre, a lezione.

Esercizio 46. Utilizzando i due diversi modi per calcolare la dimensione di una rappresentazione irriducibile del gruppo simmetrico si dimostri la seguente formula:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(2i-1)!!\,(2n-2i+1)!!}{(2i-2)!!\,(2n-2i)!!}.$$

Esercizio 47. Sia Q il gruppo delle unità dei quaternioni interi.

i) Si descrivano $\mathbb{C}[Q]$ e $\mathbb{C}[D_4]$ come prodotto di algebre di matrici;
ii) Si descrivano $\mathbb{R}[Q]$ e $\mathbb{R}[D_4]$ come prodotto di algebre di matrici.

Esercizio 48. Dimostrare che se una matrice $n\times n$ a coefficienti complessi X è tale che $\mathrm{Tr}(X) = \cdots = \mathrm{Tr}(X^n) = 0$ allora X è nilpotente. La stessa cosa è vera su un campo qualsiasi?

Esercizio 49. Sia G un gruppo finito e sia $\mathbb{C}[G]$ l'insieme delle funzioni su G. Se V è una rappresentazione complessa di G si definisca $c_V : V \otimes V^* \longrightarrow \mathbb{C}[G]$ mediante

$$(c_V(v \otimes \psi))(g) = \psi(g\,v).$$

Se U e V sono di dimensione finita abbiamo già osservato come esista un isomorfismo canonico tra $U^* \otimes V^*$ e il duale di $U \otimes V$. Si dimostri che

$$c_U(u \otimes \varphi) \cdot c_V(v \otimes \psi) = c_{U \otimes V}(u \otimes v \otimes \varphi \otimes \psi).$$

[Questo ci dice che il prodotto tra funzioni si può descrivere solo in termini di teoria delle rappresentazioni di G]

Esercizio 50. [Questo esercizio è il continuo dell'ultimo dell'altra volta, forse ce ne sarà una terza parte] Sia R^k l'insieme delle rappresentazioni (o dei caratteri) virtuali di S_k e sia $R = \bigoplus_{k \geqslant 0} R^k$ dove abbiamo posto $R^0 = \mathbb{Z}$. Sia $F^k : R^k \longrightarrow \Lambda^k \otimes \mathbb{Q}$ definito da

$$F^k(\chi) = \sum_{\nu \text{ partizione di } k} \frac{\chi(\nu)}{[\nu]}\, p_\nu$$

e sia $F = \bigoplus F^k$ dove F^0 manda 1 in 1.

i) Si calcoli $F(N_\lambda)$, le rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico;
ii) Si dimostri che F è un isomorfismo di $\mathbb{Z}$ moduli tra R e Λ;
iii) Si calcoli $F(Reg_k)$, la rappresentazione regolare di S_k;
iv) Si dimostri che
$$e_k = \sum_{|\nu|=k} \frac{\varepsilon(\nu)}{[\nu]} p_\nu.$$

XI settimana

La soluzione scritta di due problemi (a scelta) deve essere consegnata venerdì 18 dicembre, a lezione.

Esercizio 51. Calcolare la rappresentazione indotta di N_λ da S_{n-1} a S_n.

Esercizio 52.
(1) Descrivere la decomposizione di $V^{\otimes 2}$ e $V^{\otimes 3}$ come somma diretta di rappresentazioni irriducibili di S_2 e S_3 rispettivamente.
(2) Descrivere la decomposizione di $V^{\otimes 2}$ e $V^{\otimes 3}$ come somma diretta di rappresentazioni irriducibili di $GL(V)$.

Esercizio 53.
(1) Si descriva l'algebra gruppo $\mathbb{F}_7[\mathbb{Z}/5]$.
(2) Descrivere, al variare di $p \neq 5$, l'algebra gruppo di $\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/5]$.
(3) Cosa succede per $p = 5$?

Esercizio 54. Sia λ una partizione di n e sia $S_\lambda(V)$ la rappresentazione irriducibile di $GL(V)$ in $V^{\otimes n}$ associata alla partizione λ. Sia $\bar{S}_\lambda(V)$ lo spazio $S_\lambda(V)$ considerato come rappresentazione di $SL(V)$ (per restrizione).
(1) Verificare che $\bar{S}_\lambda(V)$ è una rappresentazione irriducibile di $SL(V)$.
(2) Date due partizione λ e μ di n, è vero che $\bar{S}_\lambda(V) \simeq \bar{S}_\mu(V)$ se e solo se $\lambda = \mu$?

Esercizio 55. Siano R e Λ gli $\mathbb{Z}$ moduli introdotti negli esercizi 50 e 45 e $F : R \longrightarrow \Lambda$ l'isomorfismo dell'esercizio 50. Definiamo il seguente prodotto su R. Se $\phi \in R^h$ e $\psi \in R^k$ definiamo

$$\phi \bullet \psi = \mathrm{Ind}_{S_h \times S_k}^{S_{h+k}} \phi \otimes \psi$$

e estendiamo questo prodotto a tutto R per bilinearità. Si dimostri che

$$F(\phi \bullet \psi) = F(\phi)F(\psi).$$

XII settimana

Ormai correggeremo quelli del compito!

Esercizio 56. Sia G un gruppo finito e sia $\mathbb{C}[G] = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C}\}$ l'anello commutativo delle funzioni su G. Sia $R(G)$ il sottoanello di $\mathbb{C}[G]$ generato dai caratteri delle rappresentazioni complesse di G. Per quali G, l'anello $R(G)$ è un dominio?

Esercizio 57. Sia H un sottogruppo di un gruppo finito G. Sia V una rappresentazione di G e sia V_H la restrizione di V a H. Allora per ogni rappresentazione W di V esiste un isomorfismo canonico

$$\mathrm{Ind}_H^G(V_H \otimes W) \simeq V \otimes \mathrm{Ind}_H^G(W).$$

Esercizio 58. Sia $k_{\lambda\mu}$ la molteplicità della rappresentazione irriducibile N_μ nella decomposizione della rappresentazione $P_\lambda \simeq \mathbb{C}[S_n/S_\lambda]$. Si dimostri che $S_\lambda = \sum_\mu k_{\mu\lambda} m_\mu$.

Esercizio 59. Si descriva l'algebra gruppo $\mathbb{F}_7[D_5]$;

Esercizio 60. Sia $E \subset F$ un'estensione di campi finita e di Galois, e sia Γ il gruppo di Galois. Sia G un gruppo finito e sia V una rappresentazione finito dimensionale di G su F. Si dice che V ha una E struttura se esiste $W \subset V$ un E sottospazio vettoriale stabile per l'azione di G tale che la mappa di moltiplicazione induce un isomorfismo $F \otimes W \simeq V$.

Sia V una rappresentazione finito dimensionale di G su F.

i) Se V ammette una E struttura definire una azione di Γ su V tale che
   a) $V^\Gamma = W$;
   b) $\gamma(\lambda\, v) = \gamma(\lambda)\gamma(v)$ per ogni $\lambda \in F$ e per ogni $v \in V$;
   c) $\gamma(v + w) = \gamma(v) + \gamma(w)$ per ogni $v, w \in V$ e $\gamma(gv) = g\gamma(v)$ per ogni $g \in G$, $\gamma \in \Gamma$ e $v \in V$.

ii) viceversa data una azione di Γ con la propietà b) e c) dimostrare che V^Γ è una E struttura per V.

[Le ipotesi di finitezza non sono strettamente necessarie in generale servono delle ipotesi di continuità sull'azione di Γ. Se siete digiuni di teoria dei campi potete assumere che i campi siano di caratteristica 0]

Esercizio 61. Per una rappresentazione infinito dimensionale V di un gruppo G non è definito il carattere $\chi_V(X)$, $X \in G$. Però, se la rappresentazione ammette una gradazione $V = \bigoplus_{n \geqslant 0} V_n$ data da sottorappresentazioni finito dimensionali $V_n \subset V$, allora si definisce il q-carattere graduato:

$$\chi_V(X; q) = \sum_{n \geqslant 0} \chi_{V_n}(X) q^n\,,$$

che è una serie formale in q a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione m, visto come rappresentazione del gruppo $GL(V)$.

i) L'algebra simmetrica $S^{\cdot}(V)$ ammette la gradazione $S^{\cdot}(V) = \bigoplus_{n\geqslant 0} S^n(V)$. Si dimostri la seguente formula per il q-carattere:

$$\chi_{S^{\cdot}(V)}(X;q) = \frac{1}{det(1-qX)}\,.$$

ii) L'algebra alterna $\Lambda^{\cdot}(V)$ ammette la gradazione $\Lambda^{\cdot}(V) = \bigoplus_{n=0}^{m} \Lambda^n(V)$. Si dimostri la seguente formula per il q-carattere:

$$\chi_{\Lambda^{\cdot}(V)}(X;q) = det(1+qX)\,.$$

Esercizio 62. i) Verificare che il q-carattere graduato del gruppo $GL(U)\times GL(V)$ sullo spazio $S^{\cdot}(U\otimes V)$ è:

$$\chi_{S^{\cdot}(U\otimes V)}(X,Y;q) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m'} \frac{1}{1-qx_iy_j}\,,$$

dove $m=\dim(U)\leqslant m'=\dim(V)$ e $\{x_i\}$ e $\{y_j\}$ sono gli autovalori di X e Y rispettivamente.

ii) Usare la formula di Cauchy per dedurre che il il carattere di $GL(U)\times GL(V)$ sulla rappresentazione $S^n(U\otimes V)$ é:

$$\sum_{|\lambda|=n,\, ht(\lambda)\leqslant m} S_\lambda(x_1,\dots,x_m)S_\lambda(y_1,\dots,y_{m'})\,.$$

iii) Dedurre la formula di Cauchy per le rappresentazioni:

$$S^n(U\otimes V) = \bigoplus_{|\lambda|=n,\, ht(\lambda)\leqslant m} S_\lambda(U)S_\lambda(V)\,. \tag{1}$$

Esercizio 63. i) Si consideri lo spazio $U^{\otimes n}\otimes V^{\otimes n}$ come rappresentazione del gruppo S_n. Descrivere una sua decomposizione come somma di sottorappresentazioni, ottenuta decomponendo $U^{\otimes n}$ e $V^{\otimes n}$.

ii) Trovare la componente isotipica in $U^{\otimes n}\otimes V^{\otimes n}$ associata alla sottorappresentazione banale di S_n.

iii) Dedurre la decomposizione (1) direttamente, senza usare la formula di Cauchy.

Compito del 20 gennaio 2010

Esercizio 64. Sia G un gruppo finito che agisce su un insieme finito X con almeno due elementi. Diciamo che l'azione di G su X è *doppiamente transitiva* se dati comunque $x,y,x',y'\in X$ con $x\neq y$ e $x'\neq y'$, esiste $g\in G$ tale che $x'=gx$ e $y'=gy$. Dimostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

a) l'azione di G su X è doppiamente transitiva;
b) l'azione di G su $X\times X$ ha esattamente due orbite: la diagonale ed il complementare;
c) se χ_X è il carattere della rappresentazione di permutazioni di X, allora $\langle 1,\chi_X^2\rangle = 2$;
d) V_X, la rappresentazione di permutazioni associata all'azione di G su X, decompone come $V_X\simeq \mathbb{C}\oplus\theta$, con θ sottorappresentazione irriducibile.

Esercizio 65. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione m. Data una partizione λ di un numero intero n si consideri la rappresentazione $S_\lambda(V)$ del gruppo $GL(V)$. Si dimostri che $S_\lambda(V)\neq 0$ se e solo se l'altezza $\mathrm{alt}(\lambda)$ di λ è minore o uguale a m.

Esercizio 66. Sia D_n il gruppo diedrale di ordine $2n$ e sia $C_n \subset D_n$ il sottogruppo ciclico di ordine n generato dalla rotazione ρ di $\frac{2\pi}{n}$. Denotiamo con $\mathbb{C}_m$ la rappresentazione unidimensionale di C_n in cui ρ agisce per moltiplicazione per $e^{\frac{2\pi m i}{n}}$. Per quali m la rappresentazione indotta $\mathrm{Ind}_{C_n}^{D_n} \mathbb{C}_m$ è irriducibile?

Esercizio 67. Sia $H \subset G$ un sottogruppo abeliano di indice m del gruppo finito G. Dimostrare che una qualunque rappresentazione irriducibile di G ha dimensione al più m.

Esercizio 68. Data una partizione λ di n, denotiamo con N_λ la rappresentazione irriducibile complessa di S_n associata alla partizione λ.

(1) si descriva la rappresentazione indotta da S_{n-1} a S_n della rappresentazione banale
(2) Sia $\mathbb{C}^n$ la rappresentazione standard di S_n. Dimostrare che vale la seguente decomposizione di S_n moduli:
$$V \otimes N_\lambda = \bigoplus_{\mu,\nu} N_\nu$$
dove la somma è fatta al variare delle coppie (μ, ν), dove μ una partizione di $n-1$ tale che $\mu \subset \lambda$, e ν è una partizione di n tale che $\nu \supset \mu$.