1. Diario approssimativo delle lezioni corso di Calcolo e Biostatistica 2009-2010

Lezione 1; mar. 6 ottobre 2009, 2 ore.
Presentazione del corso.
Descrizione di un insieme, appartenenza $a \in A, a \notin A$.
Relazioni e operazioni tra insiemi: $A \subset B, A \supset B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B$.
Insieme vuoto $\varnothing$.
Insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$.
Cardinalità di insiemi finiti: cardinalità dell'unione e dell'intersezione.
Insieme prodotto $A \times B$ e cardinalità dell'insieme prodotto.
Cenni sulla cardinalità di insiemi infiniti.
Numeri razionali e numeri periodici

Lezione 2; gio. 8 ottobre, 2 ore.
Numeri reali $\mathbb{R}$. Confronto di due numeri reali. Le relazioni di ordinamento: $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$.
Rappresentazione dei numeri reali come punti di una retta.
Intervalli chiusi e aperti. ∞, $-\infty$ semirette aperte e chiuse.
Risoluzione di semplici disequazioni.
modulo di un numero reale.
Il piano cartesiano e $\mathbb{R}^2$.
Grafico di una funzione e rappresentazione grafica di una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.
Parabole e studio del segno di un polinomio di secondo grado.
Misura di un angolo in radianti e in gradi.

Lezione 3; ven. 9/10; 2 ore.
Seno e coseno di un angolo.
Calcolo del seno e del coseno di alcuni angoli.
Tangente di un angolo
Studio del segno e zeri di $\sin(x)$ e $\cos(x)$.
Definizione di x^m per m intero e $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$
Funzioni crescenti, decrescenti, non crescenti e non decrescenti.
Crescenza della funzione x^m ($x > 0$ e $m > 0$).
Potenze razionali di un numero positivo: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.
Potenze reali di un numero positivo (cenni).
Notazione scientifica: ordini di grandezza.

Lezione 4; mar. 13/10; 2 ore.
Funzione esponenziale.
Esempi di situazioni descritte da una funzione esponenziale.
Grafico della funzione esponenziale.
Proprietà algebriche dell'esponenziale.
Funzioni tra insiemi.
Esempi di funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ e da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$: simmetria rispetto alla retta $x = y$ e traslazione verso l'alto.
Immagine di una funzione.
Funzioni iniettive e surgettive.
Funzioni bigettive e funzione inversa.
Esempi di funzioni inverse.

Lezione 5; gio. 15/10. 2 ore.
Logaritmo in base b.
Proprietà del logaritmo.
Logaritmo in base 10 e ordine di grandezza di un numero.
Simmetria attorno alla diagonale $x = y$ e grafico della funzione inversa.
Grafico di $\log_b$ e crescenza di $\log_b$ per $b > 1$.
Esercizi.

Lezione 6; ven. 16/10. 2 ore.
Arcoseno e arcocoseno.
Arcotangente.

Composizione di funzioni, esempi.
Dominio di definizione di una espressione.
Esercizi.

Lezione 7; mar. 20/10; 2 ore.
Equazioni lineari, rette in $\mathbb{R}^2$ e piani in $\mathbb{R}^3$.
Sistemi di equazioni lineari.
Equazione di rette nel piano.
Rette parallele.
Condizione per l'unicità della soluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite.

Lezione 8; gio. 22/10; 2 ore.
Risoluzione di sistemi dipendenti da un parametro.
Punti e vettori nel piano, $P+\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{w}$, $a\vec{v}$, $\vec{PQ}=Q-P$.
Somma di un punto con un vettore, somma di vettori, moltiplicazione di vettori per uno scalare.
Rette in forma parametrica.
Esercizi

Lezione 9; ven. 23/10; 2 ore.
Distanza tra punti in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$.
Lunghezza di un vettore.
Prodotto scalare di due vettori, angolo tra due vettori.
Retta del piano passante per un punto e ortogonale ad un vettore dato.
Esercizi

Lezione 10; mar. 27/10; 2 ore.
Proiezioni ortogonali.
Matrici.
Somma di matrici, moltiplicazione di una matrice per un numero, matrice nulla e matrice opposta.
Prodotto di una matrice per una colonna.
Scrittura di un sistema lineare con il formalismo matriciale.

Lezione 11; gio. 29/10; 2 ore.
Prodotti di matrici
Matrice identica
Matrice inversa, e matrici invertibili

Lezione 12; ven. 30/10; 2 ore.
Determinante di una matrice 2×2.
Criterio per l'invertibilità di una matrice 2×2 e matrice inversa.
Area del parallelogramma generato da due vettori.

Lezione 13; mar. 3/11; 2 ore.
Successioni di numeri reali.
Presentazione di una successione tramite una lista di numeri, tramite una formula chiusa e tramite una fomrula per ricorrenza.
Progressioni geometriche: $a_n = ba^n$, $n \geqslant 0$.
Progressioni aritmetiche: $a_n = C + Dn$, $n \geqslant 0$.
Notazione della sommatoria $\sum_i$
Successione delle somme parziali: $s_n = \sum_{i=0}^n a_i = s_{n-1} + a_n$.
Formula $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Lezione 14; gio. 5/11; 2 ore.
Successione delle somme parziali di una progressione aritmetica: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(C+Di) = C(n+1) + D\frac{n(n+1)}{2}$.
Successione delle somme parziali di una progressione geometrica: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} ba^i = b\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

Lezione 15; ven. 6/11; 2 ore.
Limite di una successione, definizione ed esempi.
Proprietà algebriche dei limiti;
Limite di una successione esponenziale a^n e di una successione potenza n^c;
Calcolo di limiti di successioni.

Lezione 16; mar. 10/11; 2 ore.
Calcolo di limiti di successioni con forme indeterminate.
Serie. Serie geometrica.

Lezione 17; gio. 12/11; 2 ore.
Limiti di funzione: definizione ed esempi.
Proprietà algebriche dei limiti di funzione.
Calcolo di limiti di funzioni.

Lezione 18; ven. 13/11; 2 ore.
Esempi di limiti di funzione
Alcuni limiti notevoli di funzione.

Lezione 19; mar. 17/11; 2 ore.
Prova di Esonero.

Lezione 20; gio. 19/11; 2 ore.
Esonero 1.

Lezione 21; ven. 20/11; 2 ore.
Correzione dell'esonero.
Introduzione alla probabilità elementare ed al calcolo combinatorio.

Lezione 22; mar. 24/11; 2 ore.
Numero di possibili disposizioni (ordinate) di k palline prese da un'urna con n palline: $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.
Numero di possibili combinazioni (estrazioni non ordinate) di k palline prese da un'urna con n palline: $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.
Probabilità di fare cinquina al gioco del lotto.

Lezione 23; gio. 26/11; 2 ore.
Probabilità di avere k teste nel lancio di n monete eque: $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$.
Probabilità di avere k teste nel lancio di n monete truccate: $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.
Regole per il calcolo delle probabilità:

(1) se A e B sono eventi indipendenti, allora: $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B)$.
(2) $P(A \text{ oppure } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$.

Lezione 24; ven. 27/11; 2 ore.
Probabilità condizionata: $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$

Lezione 25; mar. 1/12; 2 ore.
Applicazioni della formula della probabilità condizionata
Definizione della derivata come gradiente della retta tangente.
Formula per la derivata come limite del rapporto incrementale.

Lezione 26; gio. 3/12; 2 ore.
Derivata di $ax + b$ e di x^2.
Equazione della retta tangente ad una curva $y = f(x)$ in un punto $P = (a, f(a))$.

Lezione 27; ven. 4/12; 2 ore.
Derivata di x^n, $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x e $\log(x)$.
Regole di derivazione: linearità, derivata del prodootto e del rapporto di funzioni, derivata di funzioni composte.
Esempi di calcolo di derivata.

Lezione 28; gio. 10/12; 2 ore.
Calcolo di derivate.
Applicazione della derivata allo studio di funzioni: crescenza, decrescenza e punti critici di una funzione

Lezione 29; ven. 11/12; 2 ore.
Massimi e minimi relativi. Massimi e minimi assoluti.
Problemi di massimo e minimo.

Lezione 30; mar. 15/12; 2 ore.
Esempi di studio di funzione e di problemi di massimo e minimo.
Definizione geometrica dell'integrale $\int_a^b f(x)dx$ come area sotto la curva $y = f(x)$ tra a e b.
Esempi di integrali: integrale di una funzione costante e di una funzione lineare.
Formula per l'integrale definito tramite l'approssimazione con una funzione costante a tratti.

Lezione 30; gio. 17/12; 2 ore.
Funzione integrale ed integrale indefinito.
Teorema fondamentale del calcolo:
(a) se $F(x) = \int_c^x f(t)dt$, allora $F'(x) = f(x)$;
(b) se $F'(x) = f(x)$, allora $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
Applicazione: integrali di x^n per $n \neq 1$, $1/x, \sin(x), \cos(x), e^x$.

Lezione 31; ven. 18/12; 2 ore.
Tecniche di integrazione: integrazione per sostituzione ed integrazione per parti.

Lezione 32. esempi

Lezione 33; ven. 8/1; 2 ore.
Statistica descrittiva, indicatori di posizione (o di centro) e indicatori di dispersione
media moda mediana
frequenze e istogramma
varianza

Lezione 34; mar. 12/1; 2 ore.
spazi di probabilità finiti
variabili casuali
densità di probabilità associata ad un variabile casuale

Lezione 35; gio. 14/1; 2 ore.
frequenza, media e varianza di una variabile casuale
distribuzione binomiale

Lezione 36; ven. 15/1; 2 ore.
proprietà elementari della media
media e deviazione standard della distribuzione binomiale
distribuzione geometrica
media della distibuzione geometrica

Lezione 37; mar. 19/1; 2 ore.
variabili casuali a valori continui
distribuzione uniforme
distribuzione gaussiana

Lezione 38; gio. 21/1; 2 ore.
ipotesi statistiche
livello di fiducia

Lezione 39; ven. 22/1; 2 ore.
esercizi

2. Esercizi di ripasso, martedì 6 ottobre

Esercizio 1. Senza ricorrere alla calcolatrice disporre in ordine crescente i seguenti numeri:

$$1,12 \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{\pi}{2} \qquad \frac{4}{3} \qquad \sqrt{2}.$$

Esercizio 2. Sia A un insieme con 5 elementi e B un insieme con 7 elementi. Se A e B sono insiemi disgiunti (cioè se l'intersezione $A \cap B$ di A e B è vuota) allora quanti elementi ha l'unione di A e B? E se invece l'intersezione di A e B ha due elementi?

Esercizio 3. Disegnare il grafico della funzione $f(x) = 2\,x - 5$.

Esercizio 4. Disegnare il grafico della funzione $f(x) = |x - 5|$.

Esercizio 5. Risolvere l'equazione $x^2 - 2\,x - 8 = 0$.

Esercizio 6. Risolvere la disequazione $x^2 - 2\,x - 8 > 0$.

Esercizio 7. Calcolare $\log_2 8$, $\log_e(e^2)$.

Esercizio 8. Quante sono le soluzioni dell'equazione $e^x = -x$?

Esercizio 9. Quanto valgono i seguenti numeri:

$$\sin 60^o \qquad \cos 135^o \qquad \tan 45^o \qquad \sin 30^o?$$

Esercizio 10. A mezzogiorno il solo è alto 60^o. Una torre verticale getta un'ombra lunga 20 metri. Quanto è alta la torre?

3. Esercizi venerdì 5 ottobre

Esercizio 11. Sia A un insieme con 5 elementi e sia

$$B = \{(a, a) \text{ con } a \in A\}.$$

Calcolare $card\, A \times A$, $card\, B$ e $card(A \times A) \smallsetminus B$.

Esercizio 12. Dire quali delle seguenti affermazioni valgono per ogni insieme A, B, C:

1) $(A \smallsetminus B) \cap (B \cap C) = \varnothing$;
2) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C) \smallsetminus (B \cap C)$;
3) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \supset A \cap (B \cup C) \smallsetminus (B \cap C)$;
4) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \smallsetminus (B \cap C)$;
5) $(A \smallsetminus (B \cup C)) \cup (B \smallsetminus (A \cup C)) \cup (C \smallsetminus (A \cup B)) = (A \cup B \cup C) \smallsetminus ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$.

Esercizio 13. Si determino i numeri reali x per i quali vale la seguente diseguaglianza:

$$(x^4 - x^2) > 0.$$

Esercizio 14. Si determino i numeri reali x per i quali vale la seguente diseguaglianza:

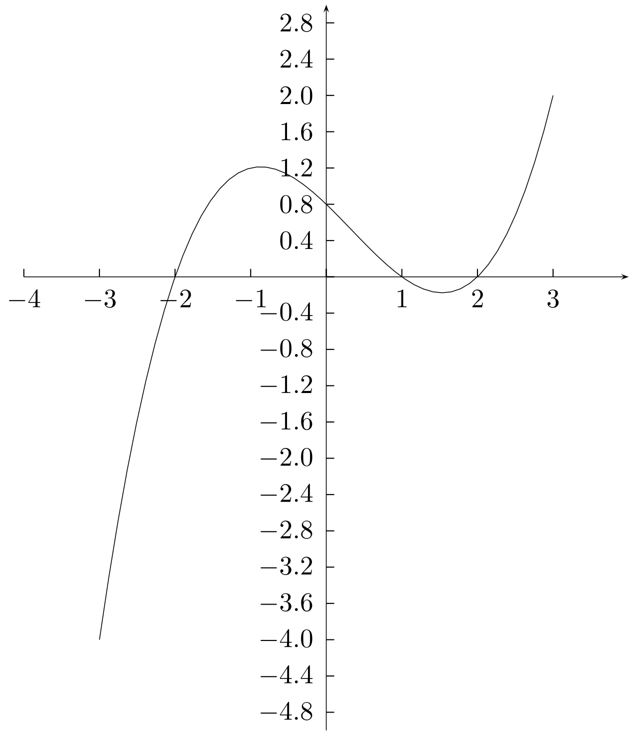
$$(x^4 - 1)(2^x - 4) > 0.$$

Esercizio 15. Si calcolino le soluzioni della seguente disequazione

$$(x - 1)\sin(x) > 0.$$

4. Esercizi venerdì 16 ottobre

Esercizio 16. Sia $f : [-3, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con il seguente grafico:



i) Qual'è l'immagine di f?
ii) Dire se f è iniettiva.
iii) Quanto vale $f(0)$?
iv) Per quali valori la funzione è zero?
v) Per quali valori la funzione è positiva?

Esercizio 17. Sia $f(x) = \sin(x) + 1$ e $g(x) = 10^x + \pi - 1$ e sia $h = f \circ g$. Calcolare $h(0)$.

Esercizio 18. (1) Calcolare $\log_{10} 7 - 2\log_{10} \sqrt{7}$.
(2) È vero che $\log_b(x + y) = (\log_b x)(\log_b y)$ per ogni x e per ogni y?
(3) È vero che $\log_{b^2} x = \frac{1}{2}\log_b x$?

Esercizio 19. Dire quando la seguente funzione è definita e studiarne il segno (ovvero dire per quali x è maggiore di zero, per quali è minore di zero e per quali è uguale a zero):

$$f(x) = \frac{10^x - 1}{2^{-x} - 2}.$$

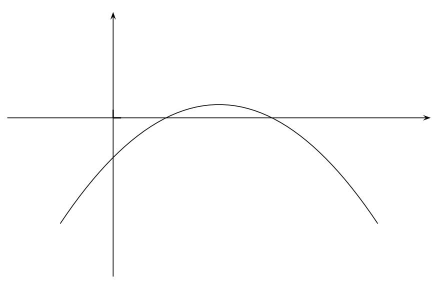
Esercizio 20. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Determinare l'immagine di f.

5. Esercizi venerdì 23 ottobre

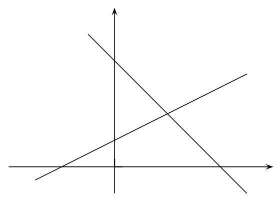
Esercizio 21. a) Si consideri la seguente figura,



Di quale funzione potrebbe essere il grafico?

i) $f(x) = 3x + 2$;
ii) $f(x) = x^2 - 2x - \frac{3}{4}$;
iii) $f(x) = \frac{-x^2-2x-2}{5}$;
iv) $f(x) = \frac{-x^2+4x-3}{4}$;
v) $f(x) = -x^2 - 1$.

b) Il grafico in figura rappresenta una coppia di rette



Di quale coppia di rette potrebbe trattarsi

i) $\mathcal{R}:\ 4x - 6y = 6$ e $\mathcal{S}:\ 6x - 9y = 9$;
ii) $\mathcal{R}:\ x - 2y = -1$ e $\mathcal{S}:\ x + y = 2$;
iii) $\mathcal{R}:\ 3x - y = 4$ e $\mathcal{S}:\ x + y = 4$;
iv) $\mathcal{R}:\ x - y = -5$ e $\mathcal{S}:\ x + y = 3$;
v) $\mathcal{R}:\ 2x - 6y = 5$ e $\mathcal{S}:\ -3x + 9y = 7$;

Esercizio 22. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ y + z = 1 \\ 3x - y + 4z = 7 \end{cases}$$

Esercizio 23. Determinare per quali k le rette

$$e^k\,x + k\,y = 2 \qquad k\,x + 4\,e^{-k}\,y = 3$$

sono parallele.

Esercizio 24. Si dica per quali k il seguente sistema ha soluzione

$$\begin{cases} (k-7)\,x - \ 2\,y = 1 \\ (k-1)\,x + (k-2)\,y = -1 \end{cases}$$

Esercizio 25. Si calcoli somma, differenza e prodotto scalare dei vettori $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (1, -1)$. Si scriva l'equazione della retta ortogonale a u e passante per il punto $P = (1, 1)$. Si scriva una parametrizzazione della stessa retta.

6. Esercizi venerdì 30 ottobre

Esercizio 26. [Compito d'esame 5 febbraio 2007] Assegnati $\mathsf{u} = (2, -3)$, $\mathsf{v} = (-1, 2)$ e $\mathsf{w} = (-1, 3/2)$ trovare a e b tali che $a\mathsf{u} + b\mathsf{v} = \mathsf{w}$.

Esercizio 27. [Compito 1 marzo 2006] Per quali valori del parametro k le due rette seguenti hanno un punto di intersezione nel primo quadrante?

$$k\,x + y = k; \quad -x + k\,y = 2.$$

Esercizio 28. Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (1, 3)$ e ortogonale a $\vec{v} = (1, 2)$

Esercizio 29. Calcolare il coseno dell'angolo tra i vettori $\vec{v} = (1, 1, 1)$ e $\vec{w} = (1, -2, 3)$ e la lunghezza del vettore $\vec{v} + \vec{w}$.

Esercizio 30. Calcolare il prodotto $\mathsf{A} \cdot \mathsf{B}$ delle due matrici seguenti:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 31. Si calcoli l'inversa della matrice
$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Si risolva il sistema
$$\begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}.$$

Esercizio 32 (Compito d'esame 28 febbraio 2005)**.** Data la matrice $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 3a & -b \end{pmatrix}$ determinare a e b in modo tale che risulti $\mathsf{A} \cdot \mathsf{v} = \mathsf{u}$ con $\mathsf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathsf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. Esercizi venerdì 6 novembre

Esercizio 33. Trovare una formula chiusa per le seguenti successioni:
a) $2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, \cdots$
b) $-2, 6, -18, 54, -162, \cdots$
c) $3, 3/4, 1/3, 3/16, 3/25, 1/12, 3/49, 3/64, \cdots$

Esercizio 34. a) Sia a_n la successione definita ricorsivamente da $a_0 = 3$ e $a_{n+1} = a_n + 7$. Trovare una formula chiusa per la successione e trovare il termine a_{100}.
b) Sia a_n la successione definita ricorsivamente da $a_0 = 1$ e $a_{n+1} = 2a_n + 3$. Trovare a_5 e trovare una formula chiusa per la successione.

Esercizio 35. a) Sia a_n una successione geometrica con $a_2 = 2$ e $a_5 = 54$. Si trovi una formula chiusa per a_n.
b) Sia a_n una successione aritmetica con $a_2 = 2$ e $a_5 = 54$. Si trovi una formula chiusa per a_n.

Esercizio 36. Calcolare le seguenti sommatorie:
a) $\displaystyle\sum_{i=2}^{5} (i^2 - 6)$.
b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{12} (2i - 3)$.
c) $\displaystyle\sum_{i=2}^{12} 3 \cdot 2^i$.
d) $\displaystyle\sum_{i=3}^{n} (-2 + 7i - 5 \cdot 3^i)$.

Esercizio 37. Calcolare il limite delle seguenti successioni:
a) $\dfrac{3\,n^2 + 4}{5\,n^2 + 7\,n + 1}$.
b) $\dfrac{3\,n^2 + 4}{n + 1}$.
c) $\dfrac{\sqrt{n + 3}}{n + 12}$.
d) $\dfrac{2^n}{n}$.
e) $(0,2)^n$.
f) $n + 2^{-n}$.

Esercizio 38. Calcolare le seguenti serie:
a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i}$.
b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+3}}$.
c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^i - 2^i}{6^i}$.

8. Esercizi venerdì 13 novembre

Esercizio 39. Calcolare il limite delle seguenti successioni:

a) $\dfrac{3\,n^2+4}{n^3+1}$,

b) $\dfrac{3-n^{-2}}{2^{-3n}+1-3/n}$,

c) $\dfrac{n^3-3n^2+\frac{4}{n}-3^{-2n}}{5-n^{3+2^{-n}}+7n^2}$.

Esercizio 40. Calcolare le seguenti sommatorie e serie:

a) $\displaystyle\sum_{i=3}^{5}\frac{i^3}{5-3i+4i^2}$,

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(7i-5)$,

c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(-3)^{i+2}}$,

d) $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty}(0,3^i-5^{-i})$,

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)$.

Esercizio 41. i) Sia a_n tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$. Cosa si può dire del limite della successione $n\cdot a_n$?
ii) Sia a_n una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Cosa si può dire del limite della successione $n\cdot a_n$?

Esercizio 42. Calcolare i seguenti limiti di funzione:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 4^{3-\sqrt{2}x}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{-2x^3+6}-2^{7x}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{4/5}-5x^2}{-3x^{4/3}-\sqrt{x}}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^4-5x^2}{x-2x^4}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to4^+}\frac{1}{\sqrt{x}-2}$,

f) $\displaystyle\lim_{x\to-2^+}\frac{1}{x^3+8}$,

Esercizio 43. Calcolare i seguenti limiti di funzione:

a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{3x}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(x-\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3^{-x}-1}{x}$.

Esercizio 44. Per le seguenti funzioni, trovare l'insieme di definizione e calcolare il limite in ogni punto al bordo dell'insieme di definizione:

a) $\dfrac{(x+5)^2}{\sqrt{x}}$,

b) $\dfrac{2^x-2}{x}$,

c) $\dfrac{\tan(3x/\pi)}{x}$.

9. Prova di Esonero del 17/11/2009

Esercizio 45. Per quali k la seguente matrice è invertibile?

$$\begin{pmatrix} 3k+2 & 2k^2-1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

Esercizio 46. Siano $\vec{u} = (1,1)$ e $\vec{v} = (1,-1)$ vettori del piano.

i) Si determini a tale che $\vec{u} + a\vec{v}$ sia ortogonale al vettore $(1,3)$
ii) Si determini a tale che $\vec{u} + a\vec{v}$ sia parallelo al vettore $(1,3)$
iii) Si determini a tale che $\vec{u} + a\vec{v}$ formi un angolo di 45 gradi con il vettore $(0,1)$

Esercizio 47. Si consideri la successione definita ricorsivamente da:

$$a_0 = 7\,,\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n\,.$$

i) Si scriva una formula chiusa per a_n.
ii) Si calcoli la successione delle somme parziali s_n.
iii) Si calcoli il limite della serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

Esercizio 48. Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}\,.$$

a) Trovare ll dominio di definizione di $f(x)$.
b) Trovare gli zeri e discutere il segno di $f(x)$.
c) Si calcoli il limite in tutti i punti al bordo del dominio di definizione.

10. Esonero del 19/11/2009

Esercizio 49. Al variare del parametro k si dica quante soluzioni ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} (7k+1)x + 2ky = 10 \\ (3k+1)x + ky = 5 \end{cases}$$

Esercizio 50. Siano $\vec{u} = (1,2)$ e $\vec{v} = (3,1)$ vettori del piano e sia $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

i) Si scriva l'equazione della retta ortogonale a $\vec{w}$ e passante per il punto $P = (0,1)$.
ii) Si determini la lunghezza di w.
iii) Si determini il coseno dell'angolo e l'angolo θ compreso tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Esercizio 51. i) Si consideri la successione

$$0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{9},\ \frac{3}{16},\ \frac{4}{25},\ \frac{5}{36}\ \dots$$

Si trovi una formula chiusa per il termine generico a_n.

ii) Si calcoli il limite della seguente successione:

$$b_n = \frac{3n^3 + 7n - 5 + \frac{1}{3^n}}{5(n-1)^3 - 2}\,.$$

Esercizio 52. Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}(x-1)}{x^2 - 4x + 4}$$

i) Trovare il dominio di definizione della funzione $f(x)$.
ii) Discutere il segno di $f(x)$.
iii) Calcolare il limite di $f(x)$ in tutti i punti al bordo del dominio di definizione.

11. Esercizi venerdì 27 novembre

Esercizio 53. Una signora ha 8 piantine diverse, e ne vuole esporre 6 sul davanzale. In quanti modi diversi può disporre le piante in fila sul davanzale?

Esercizio 54. In una competizione di atletica ci sono 25 partecipanti. In quanti modi diversi possono essere assegnate le medaglie d'oro, d'argento e di bronzo?

Esercizio 55. Si ha urna contenente 6 palline numerate: 1,2,3,4,5,6.

i) Si estraggono in modo casuale due palline. Con che probabilità le due palline estratte sono, nell'ordine, la numero 5 e la numero 3?
ii) Si estraggono in modo casuale due palline simultaneamente. Con che probabilità le due palline estratte sono, senza guardare l'ordine, le palline numero 3 e 5?
iii) Si estraggono in modo casuale tre palline. Con che probabilità le tre palline estratte sono, nell'ordine, la numero 5, la numero 3 e la numero 6?
iv) Si estraggono in modo casuale tre palline simultaneamente. Con che probabilità le tre palline estratte sono, senza guardare l'ordine, le palline numero 3, 5 e 6?

Esercizio 56. La scorsa settimana ha piovuto esattamente due giorni.

i) Con che probabilità ha piovuto Lunedì e Martedì?
ii) Con che probabilità ha piovuto due giorni consecutivi?

Esercizio 57. Si lancia una moneta equa T/C 6 volte.

i) Con che probabilità esce T 2 volte?
ii) Con che probabilità esce T 2 o 3 volte?
iii) Con che probabilità esce T almeno 2 volte?
iv) Con che probabilità esce T al più 5 volte?

Esercizio 58. Un gioco consiste nel pescare una carta da un mazzo di carte napoletane, guardarla e rimischiarla con le altre. Se si ripete il gioco 7 volte, con che probabilità si è pescato per 3 volte una carta di denari?

Esercizio 59. (Esame del 28/2/2005) I mancini rappresentano il 12% della popolazione mondiale. Calcolare la probabilità che in una classe di 20 alunni vi è almeno un mancino.

Esercizio 60. Durante le vacanze estive, la probabilità che Anna va in piscina in un dato giorno è pari a 0,6. La probabilità che, in un dato giorno, Anna e Maria vanno a nuotare insieme è pari a 0,45. Se, in un dato giorno, si vede Anna in piscina, con che probabilità c'è anche Maria?

Esercizio 61. In una tavola calda l'80% dei clienti ordina patatine ed il 60% ordina piselli, ed il 50% di coloro che ordinano piselli ordinano anche patatine.

i) Calcolare la probabilità che un cliente scelto a caso ordini patatine.
ii) Calcolare la probabilità che un cliente scelto a caso ordini patatine e piselli.
iii) Calcolare la probabilità che un cliente scelto a caso ordini patatine o piselli.
iv) Calcolare la probabilità che un cliente scelto a caso ordini patatine ma non piselli.
v) Se Mario ha ordinato piselli, con che probabilità ha ordinato anche patatine?
vi) Se Mario ha ordinato patatine, con che probabilità ha ordinato anche piselli?

12. Esercizi venerdì 4 dicembre

Teoria della probabilità

Esercizio 62. i) Quante parole diverse si possono formare con le lettere della parola "PROBLEMA"?
ii) Quante parole diverse si possono formare con le lettere della parola "PROBLEMA" che iniziano con una consonante e finiscono con una vocale?

Esercizio 63. In quanti modi si possono selezionare 3 rappresentanti da una classe di 20 studenti?

Esercizio 64. (Esame del 5/2/2007) Un test è composto da 12 domande ciascuna con 5 risposte. Se si sceglie a caso la risposta con che probabilità si indovinano almeno 10 risposte?

Esercizio 65. Francesco Totti ha dei problemi al ginocchio. Quando lui gioca la probabilità che la Roma vince è pari a 0,75, mentre quando non gioca la probabilità che la Roma vince è solamente 0,5. La probabilità che Totti giocherà Domenica è pari a 1/3. Con che probabilità la Roma vincerà Domenica?

Derivate

Esercizio 66. Si trovi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^2 - 3x + 7$ nel punto di coordinata x uguale a 2.

Esercizio 67. Si trovi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \ln(x)$ nel punto $P = (1, 0)$.

Esercizio 68. Il grafico della funzione $y = f(x)$ passa per il punto $P = (2, 6)$ e la retta tangente in P ha equazione $y - 2 = 5(x - 6)$. Si esprima, con un grafico, questa situazione. Trovare $f'(2)$.

Esercizio 69. Si calcoli la funzione derivata delle seguenti funzioni:

i) $x(2 - x)$
ii) $x^7 - 5x^5 + 3x^3 - 2$
iii) xe^{-2x}
iv) $x \sin(-3x)$
v) $\sqrt{x} \ln(x)$
vi) $\frac{x}{e^x}$
vii) $\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$
viii) $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$
ix) $\ln(1 + e^x)$
x) $\sqrt{1 - 2\sin(3x)}$

13. Esercizi venerdì 11 dicembre

Teoria della probabilità

Esercizio 70. i) Quanti numeri di 6 cifre si possono formare disponendo le cifre 1,2,3,4,5,6?
ii) Quanti numeri di 6 cifre si possono formare disponendo le cifre 1,2,3,4,5,5?
iii) Quanti numeri di 6 cifre si possono formare disponendo le cifre 1,2,2,3,3,3?

Esercizio 71. L'urna T contiene 5 palline bianche e 5 palline rosse; l'urna C contiene 3 palline bianche e 7 palline rosse. Il gioco consiste nel lanciare una moneta equa T/C e, se esce T, si estrae una pallina dall'urna T, mentre se esce C si estrae una pallina dall'urna C. Se sappiamo che, a seguito del gioco, è stata estratta una pallina rossa, con che probabilità l'estrazione è stata fatta dall'urna C?

Esercizio 72. (Esame del 1/3/2006) Due urne contengono ciascuna 100 sfere di cui nella A 30 sono bianche e 70 nere, mentre nella B 40 sono nere e 60 bianche. Si estraggono con rimpiazzamento 3 sfere da A e indipendentemente 3 sfere da B. Calcolare la probabilità che vengano estratte da A due sfere bianche e da B almeno 2 nere.

Derivate

Esercizio 73. Si calcoli la funzione derivata delle seguenti funzioni:

i) $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$
ii) $\sqrt{x} \ln(1 + x^2)$
iii) $\frac{x}{\cos(1-3x)}$

Esercizio 74. Si studino le seguenti funzioni:

i) $y = (x - 1)e^{-3x}$ (Esame del 28/9/2004)
ii) $y = \frac{e^{-x}}{2+x}$ (Esame del 5/2/2007)
iii) $y = \sqrt{4 - x} + \frac{1}{2}x$ (Esame del 11/6/2007)

Esercizio 75. Si trovino i massimi e minimi assoluti delle seguenti funzioni, nell'intervallo indicato:

i) $y = x^2 - x^4$, $[-2, 4]$
ii) $y = e^{3x} - 2x$, $[-1, 1]$
iii) $y = x - \sqrt{x}$, $[1/8, 2]$
iv) $y = \sin x - \cos x$, $[0, 2\pi]$

Esercizio 76. (Esame del 15/2/2005) Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{k}{x}$$

per quale valore di k ha un estremo nel punto di ascissa $x = 1$? Dopo aver sostituito il valore di k trovato, individuare lequazione degli eventuali asintoti al grafico della funzione e gli intervalli di crescenza allinterno del dominio.

Esercizio 77. Un rettangolo di lati a e b è iscritto in una semicirconferenza di raggio 1, ed ha il lato di lunghezza a sul diametro della semicirconferenza. Si determini b in funzione di a utilizzando il fatto che il rettangolo è iscritto nella semicirconferenza.

i) Si trovi il valore di a per cui il perimetro del rettangolo è massimo.
ii) Si trovi il valore di a per cui l'area del rettangolo è massima.

14. Esercizi venerdì 18 dicembre

Teoria della probabilità

Esercizio 78. Nove persone devono andare in viaggio in tre macchine con 2, 3 e 4 posti rispettivamente. In quanti modi differenti si possono dividere i nove viaggiatori? (Si assuma che il modo in cui si siedono le persone all'interno di ciascuna macchina non conta).

Esercizio 79. Un'urna contiene 10 palline bianche e 20 palline nere.

i) Si estrae per 5 volte una pallina, ogni volta rimettendo la pallina estratta nell'urna e rimescolando. Si calcoli con che probabilità si sono estratte esattamente 3 palline bianche.
ii) Si estraggono 5 palline tutte insieme. Si calcoli con che probabilità si sono estratte esattamente 3 palline bianche.

Esercizio 80. (Esame del 27/9/2007) Si piantano 10 semi di germinabilit'a (= probabilit'a di germinare) 0,8. Assumendo indipendenza per la germinazione, si calcoli:

i) la probabilità che non ne germini nessuno.
ii) la probabilità che ne germino esattamente 8

Esercizio 81. La probabilità che una lampadina duri più di 1000 ore è 0,5, e la probabilità che duri più di 2000 ore è 0,1. Una lampadina che è stata già usata per 1000 ore, con che probabilità durerà altre 1000 ore.

Studi di funzione

Esercizio 82. Si studino le seguenti funzioni:

i) $y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$
ii) $y = e^x(x^2 - x)$
iii) $y = e^{-x^2+2x}$

Esercizio 83. Siano $g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni definite su tutto l'asse reale. Sia

$$f(x) = g(x)\sqrt{\frac{g(x)}{h(x)}}.$$

Si studi dominio, segno e valori agli estremi dell'intervallo di definizione di f sapendo che

i) $g(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$;
ii) $g(x) = 0$ per $x = -2$ e $x = 3$;
iii) $g(x) < 0$ per $x \in (-2, 3)$;
iv) $h(x) > 0$ per $x \in (0, -5) \cup (5, \infty)$;
v) $h(x) = 0$ per $x = 0$ e $x = 5$;
vi) $h(x) < 0$ per $x \in (-\infty, 0)$;
vii) $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} h(x) = 2$.

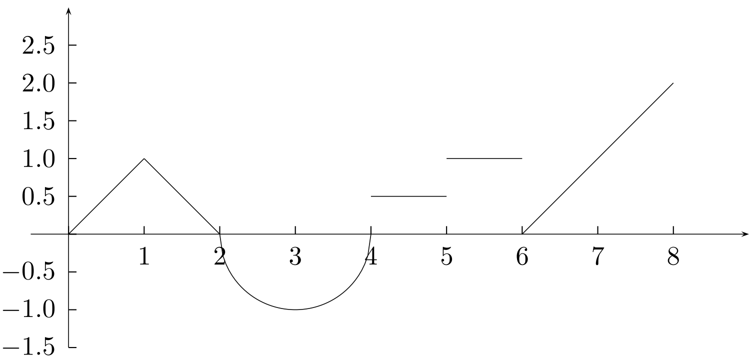
Si tracci inoltre un grafico qualitativo di una funzione f con queste proprietà.

Esercizio 84. Si tracci un grafico di una funzione con queste proprietà:

i) Dominio di $f = [-2, 1] \cup [2, \infty)$;
ii) $f(x) < 0$ per $x \in [-2, -1) \cup (3, \infty)$;
iii) $f(x) = 0$ per $x = -1$ e $x = 3$;
iv) $f(x) > 0$ per $x \in (-1, 2) \cup [2, 3)$;
v) $f(-2) = 2$, $f(2) = 2$; $f(1) = -5$, $f(5) = -3$;
vi) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
vii) $f'(x) < 0$ per $x \in [-2, 1) \cup [2, 5)$;
viii) $f'(x) = 0$ per $x = 5$;
ix) $f'(x) > 0$ per $x \in (5, \infty)$.

Integrali

Esercizio 85. Sia $y = f(x)$ la funzione il cui grafico è raffigurato nella seguente figura.



Si calcoli i seguenti integrali:

i) $\int_0^2 f(x)dx$
ii) $\int_0^7 f(x)dx$
iii) $\int_1^3 f(x)dx$

Esercizio 86. Sia $f(x)$ la funzione definita nel seguente modo: $f(x) = 3$ per $x < 3$, $f(x) = 7$ per $3 \leqslant x < 7$, $f(x) = 3x - 21$ per $x > 7$. Si calcoli i seguenti integrali:

i) $\int_0^3 f(x)dx$
ii) $\int_1^7 f(x)dx$
iii) $\int_1^9 f(x)dx$

Esercizio 87. Si calcoli le funzioni integrali indefiniti (antiderivate) delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = x^2$
ii) $f(x) = \sqrt{x}$
iii) $f(x) = cos(x)$
iv) $f(x) = e^{3x+7}$
v) $f(x) = e^{x^2}2x$

Esercizio 88. Si calcoli i seguenti integrali:

i) $\int_2^6 x^3dx$
ii) $\int_0^{2\pi/3} \sin(x)dx$
iii) $\int_2^6 e^x dx$
iv) $\int_1^4 \frac{1}{x}dx$
v) $\int_2^5 \frac{2}{-3x+4}dx$
vi) $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$

15. Esercizi martedì 19 gennaio

Esercizio 89. In una classe di 20 persone è stato chiesto ad ognuno quante sigarette fuma al giorno riportando i seguenti risultati:

20, 13, 0, 10, 0, 20, 2, 2, 15, 25, 6, 6, 0, 0, 14, 5, 15, 2, 0, 5.

i) Si calcolino le frequenze assolute N_r e se ne disegni un grafico;
ii) Si calcolino le frequenze relative;
iii) Si calcolino media, mediana e moda;
iv) Si calcoli la varianza.

Esercizio 90. La densità di probabilità di una variabile casuale X che assume valori nell'intevallo $[0, 1]$ è data dalla funzione $\rho(t) = 3t^2$.

i) Si calcoli media e varianza di X;
ii) Si dica qual è la probabilità che X assuma valori compresi tra $0,2$ e $0,5$.

Esercizio 91. Una variabile casuale X è distribuita in modo uniforme nell'intervallo $[0, a]$. Sapendo che il valore della densità di probabilità è uguale a $0,4$ si determini a.

Esercizio 92. Una variabile casuale X ha una densità di probabilità della forma

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{-\frac{(x-3)^2}{98}}.$$

i) Si determinino media e varianza di X;
ii) Si determini a;
iii) Con che probabilità X assume valori compresi tra -4 e 17?

Esercizio 93. In una piccola cittadina di 100 abitanti si gioca alla seguente versione "equa" del superenalotto: ogni settimana viene estratto un numero tra 1 e 1000. Ogni cittadino, non importa di che età, ogni settimana gioca un numero. I numeri che vengono giocati sono tutti distinti. Il prezzo di una giocata è 10 euro. Chi vince prende tutti i soldi giocati fino a quella data.

i) Con che probabilità la prima vittoria sarà di 500 euro?
ii) Quale sarà l'ammontare medio delle vincite?

Esercizio 94. Un giocatore gioca al seguente gioco d'azzardo: ad ogni lancio scommette un euro. Se esce $1, 2, 3, 4$ perde l'euro che ha giocato mentre se esce 5 o 6 gli danno indietro tre euro e guadagna quindi due euro.

i) con che probabilità dopo 7 lanci avrà vinto esattamente 5 volte e guadagnato quindi 8 euro?
ii) con che probabilità dopo 7 lanci avrà vinto alemeno 5 volte e guadagnato quindi almeno 8 euro?
iii) con che probabilità dopo 7 lanci avrà guadagnato esattamente 5 euro?
iv) Quale sarà la sua vincita o perdita media dopo 5 lanci?
v) e dopo 10?
vi) Si scrivano le frequenze delle possibili vincite dopo 3 lanci.

Esercizio 95. Nel mese di gennaio una giornata presa a casa risulta piovosa con probabilità $\frac{1}{3}$.

i) Con che probabilità i primi 5 giorni di gennaio saranno piovosi e i rimanenti non piovosi?
ii) Con che probabilità ci saranno 5 giornate piovose?
iii) Con che probabilità ci saranno almeno 3 giornate piovose?
iv) In media quante giornate piovose ci saranno a gennaio?
v) Qual è la varianza della variabile casuale $X =$ numero dei giorni piovosi di gennaio

Esercizio 96. L'altezza della popoloziane maschile italiana è supposta essere rappresentabile con una distribuzione normale di varianza $81cm^2$. La media delle altezze di un campione di 100 persone preso a caso è risultato essere uguale a $180cm$.

i) Con che livello di fiducia ls media dell'altezza di tutta la popolazione è compresa tra $178,2cm$ e $181,8cm$?
ii) Si determini l'intervallo di confidenza con livello di fiducia del $99,9$ per cento.

Esercizio 97. Si studi la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{3x}$$

Esercizio 98. Si calcolino i seguenti integrali definiti:

i)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi} 3x \sin(2x) dx$$

ii)

$$\int_{0}^{1} \frac{x}{e^{2x^2}} dx$$

iii)

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2} dx$$

Esercizio 99. i) Quante parole diverse di 8 lettere si possono formare con le lettere A, A, A, B, C, D, E, F (ciascuna presa una volta)?

ii) Quante parole diverse di 6 lettere si possono formare con le lettere A, A, A, B, C, D, E, F (ciascuna presa al più una volta)?

Esercizio 100. In un urna ci sono 20 palline numerate da 1 a 20. Un gioco consiste nell'estrarre una pallina; se il numero della pallina estratta è pari, si tira un dado equo e si vince una somma in euro pari al risultato del dado; se invece il numero della pallina estratta è dispari si lancia una moneta equa e se esce T si vincono 6 euro, mentre se esce C si perdono 10 euro.

i) Se esce un numero pari, con che probabilità si vincono 4 euro?
ii) Con che probabilità si vincono 4 euro?
iii) Se vinco 6 euro, con che probabilità ho estratto un numero dispari?
iv) Calcolare la distribuzione di probabilità della variabile $X =$ vincita (in euro).
v) Calcolare la media di X.
vi) Si calcoli la moda di X.
vii) Se ripeto il gioco 20 volte, con che probabilità avrò perso 10 euro esattamente 3 volte?