1. Appello straordinario, 3 novembre 2014

Esercizio 1. Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.

Esercizio 2. Studiare la funzione $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ determinando dominio, segno, sup, inf, immagine, andamento agli estremi del dominio di definizione ed eventuali punti di massimo e minino e punti di massimo e minimo locale.

Esercizio 3. Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(1/n).$$

Esercizio 4. Dire se la funzione $F : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_x^1 \frac{\sqrt{t}}{\sin(t)}\, dt$ si puo' estendere con continuità in 0.

Compitino del 3 novembre 2014

Esercizio 1. Sia $z = 3 - 4i$. Calcolare $1/z$ e $\|z\|$.

Esercizio 2. Si determinino i numeri complessi z tali che $z^2 = -12 + 16i$.

Esercizio 3. Sia a_n la succesione definita da

$$a_0 = 1 \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}.$$

Si dimostri che $a_n = 2^n(n+1)$.

Esercizio 4.

(1) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si dia la definizione di $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = 1$.
(2) Si dia un esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = 1$ ma f non sia continua in 0.
(3) Esiste una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ che non sia continua in 0 ma tale che $f(x)^2$ sia continua in 0?

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = 1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6e^x$. Si determini l'immagine di f.

Soluzioni del compitino del 3 novembre 2014

Esercizio 1. $\|z\| = 5$ e $\frac{1}{z} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$.

Esercizio 2. Scriviamo z nella forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. L'equazione $z^2 = -12 + 16i$ è equivalente al sistema

$$a^2 - b^2 = -12 \qquad \text{e} \qquad 2ab = 16.$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $b = 8/a$ e sostituendo nella prima otteniamo $a^4 + 12a^2 - 64 = 0$. Da questa equazione ricaviamo che $a^2 = 4$ da cui $a = \pm 2$. Quindi le soluzioni sono $z = 2 + 4i$ e $z = -2 - 4i$.

Esercizio 3. Si procede per induzione. Per il passo base si considera $n = 0$ e otteniamo $2^0(0+1) = 1 = a_0$. Assumiamo adesso la formula valga per a_n e dimostriamola per a_{n+1}. Abbiamo

$$a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \cdot (n+1) + 2^{n+1} = 2^{n+1}(n+1+1)$$

dimostrando la tesi.

Esercizio 4. $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = 1$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|x| < \delta$ e $x \neq 0$ allora $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

Un esempio che risponde sia a 2 che a 3 è il seguente: $f(x) = 1$ per $x \neq 0$ e $f(0) = -1$.

Esercizio 5. Osserviamo che per ogni x, $f(x) \geqslant 1$ inoltre $1 = f(0)$. Quindi l'immagine è contenuta nell'intervallo $[1, +\infty)$ e 1 è nell'immagine di f. Dimostriamo che è esattamente uguale a questo intervallo.

Poiché f è continua, per il teorema di Bolzano, basta dimostrare che per ogni $y > 1$ esiste x tale che $f(x) > y$. Osserviamo che se scegliamo $x = y + 1$ abbiamo $f(x) = f(y+1) > 1 + 2(y+1)^2 > 1 + 2y > y$.

2. Compitino del 17 dicembre 2014, ore 9:00, corso A

Esercizio 5. Si determini il dominio della funzione
$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}.$$
Si determini una primitva di f.

Esercizio 6. Sia f la funzione definita mediante la formula
$$f(x) = \frac{x - \frac{5}{3}}{x^2 - 1}.$$

(1) si determini il dominio di f;
(2) si studi il comportamente di f agli estremi del dominio di definizione;
(3) si determinino punti di massimo e minimo locale e l'estremo superiore ed inferiore della funzione;
(4) si determini l'immagine della funzione $g(x) = f(\frac{\sin x}{2})$.

Esercizio 7. (1) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Cosa vuol dire che esiste la derivata di f nel punto 1. (dare la definizione)
(2) Si dia un esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ che sia continua in 0 ma non derivabile in 0.
(3) Si dia un esempio di due funzioni $f, g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili su tutto il dominio e tali che $g(x)$ e $g'(x)$ siano diverse da zero per ogni $x \in (0, \infty)$ e tali che i limiti
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
esistano e siano diversi.

Esercizio 8. Siano $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da $F(x) = \int_0^x (e^{t^2} - e)\, t^2\, dt$ e $G(x) = \int_0^x t(e^t - 1) dt$. Si calcoli
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{G(x)}{F(x)}.$$

3. Soluzioni

Esercizio 1. La funzione è definita quando $e^x - 1$ è diverso da zero, ovvero quando $x \neq 1$. Quindi il dominio di f è uguale a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Calcoliamo adesso una primitiva di f. Operando la sostituzione $y = e^x$ otteniamo $dx = dy/y$ e
$$\int \frac{1}{e^x - 1}\, dx = \int \frac{1}{(y-1)y} dy.$$
Osservando che
$$\frac{1}{(y-1)y} = \frac{1}{(y-1)} - \frac{1}{y},$$
otteniamo
$$\int \frac{1}{(y-1)y} dy = \log|y - 1| - \log|y| = \log|e^x - 1| - x.$$

Esercizio 2. 1) la funzione f è ben definita per $x^2 - 1 \neq 1$ ovvero per $x \neq \pm 1$. Quindi il suo dominio è uguale a $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

2) Calcolando i limiti per x che tende agli estremi del dominio di definizione otteniamo:
$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \infty.$$

3) Dal punto 2) ricaviamo che l'estremo superiore di f è $+\infty$ e l'estremo inferiore è $-\infty$. Inoltre calcolando la derivata otteniamo che
$$f'(x) = -\frac{3x^2 - 10x + 3}{(x^2 - 1)^2}.$$
Osserviamo che il denominatore è sempre maggiore o uguale a zero, mentre il numeratore è positivo per $x \in (1/3, 3)$, è zero per $x = 1/3$ o $x = 3$ e positivo altrimenti. In particolare ne ricaviamo che

f è crescente nell'intervallo $[1/3, 1)$ e nell'intervallo $(1, 3]$.

f è decrescente nell'intervallo $(-\infty, 1)$ nell'intervallo $(-1, 1/3$ e nell'intervallo $(3, \infty)$.

Quindi f ha un punto di minimo locale in $x = 1/3$ e un punto di massimo locale in $x = 3$.

4) Osserviamo che la funzione $\frac{\sin x}{2}$ assume tutti i valori compresi tra $-1/2$ e $1/2$. Quindi l'immagine di g è uguale a $f[-1/2,1/2]$. Osserviamo che f è decrescente in $[-1/2,1/3]$ e crescente in $[1/3,1/2]$. Osserviamo inoltre che

$$f(1/3)=\frac{-4/3}{-8/9}=\frac{3}{2} \qquad f(-1/2)=\frac{-1/2-5/3}{-3/4}=\frac{26}{9} \qquad f(-1/2)=\frac{1/2-5/3}{-3/4}=\frac{14}{9}$$

Quindi, per il teorema di Bolzano l'immagine di g è uguale a $[3/2,26/9]$.

Esercizio 3. 1) f è derivabile in 1 se e solo se esiste finito il seguente limite:

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$

2) Sia $f(x)=|x|$. Allora f è continua in zero, e f non è derivabile in zero.

3) Sia $f(x)=1$ e $g(x)=1+\frac{1}{x}$ e quindi $f'(x)=0$ e $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$. Allora

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \qquad \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0.$$

Esercizio 4. La derivata di F è uguale a $F'(x)=x^2(e^x-e)$ quindi è maggiore di 0 per $x>1$ mentre è minore o uguale a 0 per $x\leqslant 1$ ed è uguale a 0 per $x=0$ e 1.

In particolare F è decrescente in $(-\infty,1]$ mentre è crescente in $[1,\infty]$. Inoltre $F(0)=0$. Inoltre $e^{x^2}>x^2$ quindi per $x\geqslant 0$ abbiamo

$$F(x)\geqslant\int_0^x t^4-et^2\,dt=\frac{1}{5}x^5-\frac{e}{3}x^3$$

In particolare $\lim F(x)$

Osserviamo che F e G sono due funzioni continue e derivabili tali che $F(0)=G(0)=0$. Provando ad applicare de l'Hopital ed utilizzando il teorema fondamentale del calcolo otteniamo:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{G'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(e^x-1)x}{x^2(e^{x^2}-e)}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(e^x-1)}{x}\frac{1}{e^{x^2}-e}=\frac{1}{1-e}$$

Quindi anche il limite cercato è uguale a $1/(1-e)$.

Compito del 19 gennaio 2015, ore 14:30

Esercizio 9. Sia $z_1=1+i$ e $z_2=1+3i$. Calcolare $\frac{z_1}{z_2}$.

Esercizio 10. Sia f la funzione definita da

$$f(x)=e^{-x}(-x^2+4x-1).$$

a) determinare dominio, zeri e segno di f;
b) determinare l'andamento di f agli estremi del dominio di definizione;
c) determinare, estremo superiore ed inferiore, eventuali punti di massimo e minimo, e punti di massimo e minimo locale;
d) tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Esercizio 11. Determinare una primitiva della funzione

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}.$$

Esercizio 12. Si consideri il sottoinsieme dei numeri reali

$$A=\left\{\frac{n-n^2}{1+n^2}\ :\ n\in\mathbb{N}\text{ e }n\geqslant 1\right\}.$$

a) Dimostrare che la successione $a_n=\frac{n-n^2}{1+n^2}$ è decrescente;
b) determinare estremo superiore ed inferiore di A;
c) dire se A ha massimo e minimo.

Esercizio 13. Sia $f_a(x)=x^4-4x^3+4x^2+a$ e sia $g(x)=x^4-4x^3+4x^2-\frac{1}{2}$.

a) Determinare il numero degli zeri di $g(x)$;
b) determinare il numero degli zeri di $f_a(x)$ al variare del parametro a.

Compito di martedì 16 febbraio 2015, ore 9:00

Esercizio 14. Sia $z = 2 + 3i$, determinare $\|z\|$ e $\frac{1}{z}$.

Esercizio 15. Si calcoli una primitiva della funzione $f(x) = x \tan(x^2)$.

Esercizio 16. Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x^2-1}.$$

a) si determini il dominio, gli zeri e il segno di f;
b) si determini l'estremo superiore ed inferiore e il comportamento agli estremi del dominio di definizione;
c) si determinino i punti di massimo e minimo locale;
d) si dica se l'immagine di f è tutto $\mathbb{R}$;
e) si disegni un grafico approssimativo della funzione.

Esercizio 17. a) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dica cosa vuol dire che f è derivabile in zero e che $f'(0) = 0$.
b) Si dia un esempio di una funzione continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che 0 è un punto di massimo ma f non è derivabile in 0.
c) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto R e sia $f(-x) = f(x)$. Si dimostri che $f'(0) = 0$.

Esercizio 18. a) Si verifichi che $2\sqrt{1+y} \leqslant y + 2$ per ogni $y \geqslant -1$.
b) Si provi che

$$\int_0^1 \sqrt{1+e^x}\, dx \leqslant 2.$$

Compito dell'appello straordinario 13 aprile 2015, ore 15, aula B

Esercizio 19. Sia $z = 1 + 2i$. Calcolare z^2, $\|z\|$ e $1/z$.

Esercizio 20. Si studi la funzione $f(x) = xe^{-x^2}$. Si determini in particolare dominio, zeri e segno, massimi e minimi e punti di massimo e minimo locale, comportamento agli estremi del dominio di definizione e si disegni un grafico approssimativo della funzione.

Esercizio 21. Si calcoli una primitiva della funzione $f(x) = \sqrt{x}\log(x)$.

Esercizio 22. a) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dare la definizione di cosa vuol dire che $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1$;
b) Esiste una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ che non sia continua in 0 ma tale che $xf(x)$ sia continua in 0?
c) Si enunci il teorema del massimo di Weierstrass;
d) Si dia un esempio di una funzione $f : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ che sia continua ma che non ammette massimo.