Prove scritte di Analisi I - Informatica - 1997-98

(A) Testi d'esame

Prova scritta del 2 giugno 1998

Esercizio 1 **(i)** Si provi che la funzione

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin \log |t|}{\sqrt{(1+t)^3}} dt, \qquad x > -1,$$

è ben definita.
(ii) Si dica se esiste, e se è finito, il limite

$$\lim_{x \to -1^+} F(x).$$

Esercizio 2 **(i)** Calcolare per ogni $n \in \mathbf{N}^+$ gli integrali

$$a_n = \int_0^n \left(\log \left| 1 + \frac{1}{n} - x \right| - x^2 \right) dx.$$

(ii) Stabilire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a_n|}}$ è convergente oppure no.
Esercizio 3 **(i)** Posto, per ogni $k \in \mathbf{N}^+$,

$$f_k(x) = \operatorname{arctg} x - k x^{4/3}, \qquad x > 0,$$

si verifichi che l'equazione $f_k(x) = 0$ ha un'unica soluzione x_k.
(ii) Si provi che $\{x_k\}$ è una successione decrescente e se ne calcoli il limite per $k \to +\infty$.
(iii) Si dimostri che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ è convergente.

Prova scritta del 16 giugno 1998

Esercizio 1 Si consideri la successione $\{a_n\}$ così definita:

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \in \mathbf{R}, \\ a_{n+1} = a_n(1 - a_n^2), \quad n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

(i) Si provi che $\{|a_n|\}$ è crescente se $|\lambda| \geq \sqrt{2}$, mentre $\{|a_n|\}$ è decrescente se $|\lambda| \leq \sqrt{2}$.
(ii) Dedurre che se $|\lambda| < 1$ allora $\{a_n\}$ è infinitesima.
(iii) Si calcoli il limite di $\{a_n\}$ nei casi $1 \leq \lambda \leq \sqrt{2}$ e $|\lambda| > \sqrt{2}$ (quando esiste).
Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right|, \quad |x| \neq 1.$$

(i) Calcolare, se esistono, i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm 1$ e per $x \to \pm\infty$.
(ii) Determinare i punti di massimo e di minimo relativo per f.
(iii) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \to \infty} \int_2^{\infty} f(t)\, dt.$$

Esercizio 3 Si calcoli l'integrale

$$\int_0^3 \sqrt{t+t^2}\, dt.$$

Prova scritta del 30 giugno 1998

Esercizio 1 Per $\lambda > -1$ si consideri la successione $\{a_n\}$ così definita:

$$\begin{cases} a_0 = \lambda, \\ a_{n+1} = |\log(1+a_n)|, \quad n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

(i) Si determini, al variare di λ in $]-1, \infty[$, il comportamento della successione $\{a_n\}$ per $n \to \infty$.
(ii) Provare che se $\lambda > 0$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente.
Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|-|x^2-1|}{x-1} \cdot e^{-|x|}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

(i) In quali punti $x_0 \in \mathbf{R}$ la funzione f è continua?
(ii) In quali punti $x_0 \in \mathbf{R}$ la funzione f è derivabile?
(iii) Calcolare, se esiste, l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt.$$

Esercizio 3 Si calcoli l'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{t-t^2}\; dt.$$

Prova scritta dell'11 settembre 1998

Esercizio 1 Si consideri la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ definita da

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \ , \\ a_{n+1} = \int_{a_n}^{1+a_n} \sqrt[4]{1+s^4} ds \ , \quad n \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

ove λ è un fissato numero positivo.

(i) Dimostrare che $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$.

(ii) Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} \ .$$

Esercizio 2 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0^+} \left[\log x + (\log|\log x|)^2\right] .$$

Esercizio 3 Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ così definita:

$$f(x,y) = \frac{x^2+2y}{x^2+y^2+1} \ .$$

(i) Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f.

(ii) Determinare, se esistono, i punti di massimo e di minimo relativo per f.

(iii) Stabilire se f ha massimo e minimo assoluti.

Prova scritta del 25 settembre 1998

Esercizio 1

(i) Stabilire qual è l'infinito di ordine superiore e qual è l'infinito di ordine inferiore fra le tre successioni seguenti:

$$n^{100n}, \qquad 2^{n^3}, \qquad 10^{n^2}.$$

(ii) Stabilire qual è l'infinitesimo di ordine inferiore e qual è l'infinitesimo di ordine superiore fra le tre successioni seguenti:

$$\frac{1}{(\log n)^{(\log n)^2}}, \qquad \frac{1}{[\log(\log n)]^n}, \qquad \frac{1}{n^{\log\log n}}.$$

Esercizio 2 Sia

$$f(x) = \frac{1}{1-\sin x}, \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

(i) Verificare che f è iniettiva e determinarne l'immagine.

(ii) Scrivere esplicitamente la funzione inversa f^{-1}.

(iii) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{y\to 1} \frac{f^{-1}(y) - y + 1}{(y-1)^2}.$$

Esercizio 3 Per ogni intervallo $I \subseteq \mathbf{R}$ si indichi con χ_I la funzione

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I, \\ 0 & \text{se } x \notin I, \end{cases}$$

e si consideri la funzione

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \chi_{[n, n+\frac{1}{2}[}(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

(i) Si determinino i punti di discontinuità di g.

(ii) Si provi che $g \in \mathcal{R}^*(0,\infty)$ e si calcoli l'integrale improprio

$$\int_0^{\infty} g(x)\, dx.$$

(B) Soluzioni

Prova scritta del 2 giugno 1998

Esercizio 1 **(i)** Fissato $x > -1$, la funzione integranda è continua in $]-1,\infty[$, tranne che nel punto $t = 0$, nell'intorno del quale però è limitata; dunque essa è Riemann-integrabile in ogni intervallo $[x, c] \subset [x,\infty[$. Inoltre, essendo

$$\left|\frac{\sin\log|t|}{\sqrt{(1+t)^3}}\right| \le (1+t)^{-3/2} \qquad \forall x \in\,]-1,\infty[\,,$$

l'integrale che definisce $F(x)$ è assolutamente convergente e quindi convergente.

(ii) Utilizzando i limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = 1,$$

si trova che

$$\lim_{t\to -1^+}\frac{\sin\log|t|}{1+t} = -1;$$

quindi la funzione integranda per $t \to -1^+$ ha lo stesso comportamento di $-(1+t)^{-1/2}$ ed è pertanto integrabile fra -1 e $+\infty$ con integrale finito.

Esercizio 2 **(i)** Si ha

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{1+\frac{1}{n}} \log\left(1+\frac{1}{n}-x\right)dx + \int_{1+\frac{1}{n}}^{n} \log\left(x-1-\frac{1}{n}\right)dx - \\
&\quad - \int_0^n x^2 dx = \\
&= \int_0^{1+\frac{1}{n}} \log t\ dt + \int_0^{n-1-\frac{1}{n}} \log t\ dt - \int_0^n x^2 dx = \\
&= [t(\log t-1)]_0^{1+\frac{1}{n}} + [t(\log t-1)]_0^{n-1-\frac{1}{n}} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^n = \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right] + \\
&\quad + \left(n-1-\frac{1}{n}\right)\left[\log\left(n-1-\frac{1}{n}\right)-1\right] - \frac{n^3}{3}.
\end{aligned}$$

(ii) Dato che

$$
\begin{aligned}
|a_n| \;&=\; \frac{n^3}{3} - \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right] - \\
&\quad - \left(n-1-\frac{1}{n}\right)\left[\log\left(n-1-\frac{1}{n}\right)-1\right],
\end{aligned}
$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{n^3}=\frac{1}{3};$$

dunque la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{|a_n|}}$ è convergente per confronto asintotico con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$.

Esercizio 3 **(i)** Per ogni $k \in \mathbf{N}^+$ la funzione f_k è concava: infatti

$$f_k'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{4}{3}kx^{1/3} \qquad \forall x > 0,$$

$$f_k''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} - \frac{4}{9}kx^{-2/3} < 0 \qquad \forall x > 0.$$

D'altra parte, $f(0) = 0$, $f_k'(0) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} f_k'(x) = -\infty$; quindi la funzione f ha un unico punto di massimo $t_k > 0$, nel quale è positiva, e per $x > t_k$ essa decresce, per poi tendere a $-\infty$ per $x \to +\infty$. Ne segue che esiste un unico punto $x_k > t_k > 0$ nel quale la f_k si annulla.

(ii) È immediato verificare che $f_{k+1}(x) < f_k(x)$ per ogni $x > 0$: quindi, essendo per definizione $f_k(x_k) = 0$ per ogni $k \in \mathbf{N}^+$, si ha

$$f_{k+1}(x_k) < f_k(x_k) = 0 \qquad \forall k \in \mathbf{N}^+,$$

da cui necessariamente $x_{k+1} < x_k$ per ogni $k \in \mathbf{N}^+$. Quindi il limite della successione $\{x_k\}$ esiste finito e non negativo. Ma poiché risulta $\mathrm{arctg} x < \pi/2$ per ogni $x > 0$, si deduce

$$kx_k^{4/3} = \mathrm{arctg} x_k < \frac{\pi}{2} \qquad \forall k \in \mathbf{N}^+,$$

e quindi $x_k < \pi^{3/4}(2k)^{-3/4}$, cioè $x_k \to 0$ per $k \to \infty$.

(iii) Dalla stima $x_k < (\pi/2)^{3/4}k^{-3/4}$, utilizzando la crescenza dell'arcotangente e la relazione $\mathrm{arctg}x < x$, che vale per ogni $x > 0$, otteniamo

$$kx_k^{4/3} = \mathrm{arctg}x_k < \mathrm{arctg}\frac{(\pi/2)^{3/4}}{k^{3/4}} < \frac{(\pi/2)^{3/4}}{k^{3/4}},$$

da cui

$$x_k < \frac{(\pi/2)^{9/16}}{k^{7/3}}.$$

Per confronto con la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-7/3}$, si conclude che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ è convergente.

Prova scritta del 16 giugno 1998

Esercizio 1 **(i)** Se $|\lambda| \geq \sqrt{2}$ risulta $|1-\lambda^2| \geq 1$, e dunque $|a_1| = |\lambda(1-\lambda^2)| \geq |\lambda|$; quindi a maggior ragione si ha $|a_1| \geq \sqrt{2}$. Ragionando per induzione si deduce allora $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.
Se invece $|\lambda| \leq \sqrt{2}$ risulta $|1-\lambda^2| \leq 1$, e dunque procedendo in modo analogo si trova $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

(ii) Essendo $|\lambda| \leq 1 < \sqrt{2}$, dalla decrescenza di $\{|a_n|\}$ segue che esiste $L = \lim_{n\to\infty} |a_n| \in [0, 1[$; passando al limite nella relazione ricorrente troviamo $L = L(1 - L^2)$, da cui $L = \pm 1$ (valori da escludere perché $L \geq 0$ e perché $|a_n| \leq |a_1| < |\lambda| \leq 1$), oppure $L = 0$. Poiché $|a_n| \to 0$, ovviamente si ha anche $a_n \to 0$.

(iii) Sia $1 < |\lambda| \leq \sqrt{2}$; allora $\{|a_n|\}$ è decrescente ed il suo limite L è necessariamente 1. D'altra parte, si verifica subito per induzione che risulta $a_n > 0$ se $1 < \lambda \leq \sqrt{2}$, mentre a_n ha segni alterni se $-1 > \lambda \geq -\sqrt{2}$: quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ se $1 < \lambda \leq \sqrt{2}$, mentre il limite non esiste se $-1 > \lambda \geq -\sqrt{2}$.
Sia $|\lambda| > \sqrt{2}$; allora $\{|a_n|\}$ è crescente ed il suo limite L è necessariamente $+\infty$. Quindi se $\lambda > \sqrt{2}$ la successione $\{a_n\}$ è a termini positivi e diverge a $+\infty$. mentre se $\lambda| < -\sqrt{2}$ la successione $\{a_n\}$ è a termini di segno alterno e non ha limite.

Esercizio 2 **(i)** Si ha

$$\lim_{x\to-1^\pm} f(x) = -\frac{1}{2} \lim_{x\to-1^\pm} \left[(x+1)\log\frac{2}{|x+1|}\right] = 0,$$

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = 2\lim_{x\to 1^\pm}\left[\frac{1}{x-1}\log\frac{|x-1|}{2}\right] = \mp\infty,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = log 1 = 0.$$

(ii) Dato che

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{(x-1)^2}\ \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{x+1}{x-1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right) = \\ &= \frac{2}{(x-1)^2}\left(-\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+2\right) \quad \forall x \neq -1, 1, \end{aligned}$$

la funzione f' è non negativa se e solo se $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \leq e$. Se $x < -1$, questa condizione equivale a $x \leq -\frac{e+1}{e-1}$; se $-1 < x < 1$, essa equivale a $-1 < x \leq \frac{e-1}{e+1}$, ed infine se $x > 1$ essa equivale a $x \geq \frac{e+1}{e-1}$. Se ne deduce che il punto $x = -\frac{e+1}{e-1}$ è di massimo relativo, mentre il punto $x = \frac{e-1}{e+1}$ è di minimo relativo per f.

Esercizio 3 Si ha, posto $\sqrt{t} = s$,

$$\int_0^3 \sqrt{t+t^2}\ dt = 2\int_0^{\sqrt{3}} s^2\sqrt{1+s^2}\ ds.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} &\int_0^{\sqrt{3}} s^2\sqrt{1+s^2}\ ds = \\ &\quad = \int_0^{\sqrt{3}} (s^2+1-1)\sqrt{1+s^2}\ ds = \int_0^{\sqrt{3}} \left[(1+s^2)^{3/2} - \sqrt{1+s^2}\right] ds. \end{aligned}$$

Calcoliamo i due integrali all'ultimo membro, cominciando dal secondo. Si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+s^2}\ ds &= \left[s\sqrt{1+s^2}\right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{s^2+1-1}{\sqrt{1+s^2}}\ ds = \\ &= \left[s\sqrt{1+s^2}\right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+s^2}\ ds + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \\ &= \left[s\sqrt{1+s^2}\right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+s^2}\ ds + \left[\log\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)\right]_0^{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+s^2}\; ds = \frac{1}{2}\left[s\sqrt{1+s^2} + \log\left(s + \sqrt{1+s^2}\right)\right]_0^{\sqrt{3}}.$$

Per l'altro integrale si ha, integrando nuovamente per parti,

$$\int_0^{\sqrt{3}} (1+s^2)^{3/2}\; ds = \left[s(1+s^2)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}} - 3\int_0^{\sqrt{3}} s^2\sqrt{1+s^2}\; ds.$$

Sostituendo, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} s^2\sqrt{1+s^2}\; ds &= \int_0^{\sqrt{3}} \left[(1+s^2)^{3/2} - \sqrt{1+s^2}\right] ds = \\ &= \left[s(1+s^2)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}} - 3\int_0^{\sqrt{3}} s^2\sqrt{1+s^2}\; ds - \\ &\quad -\frac{1}{2}\left[s\sqrt{1+s^2} + \log\left(s + \sqrt{1+s^2}\right)\right]_0^{\sqrt{3}};\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}&\int_0^{\sqrt{3}} s^2\sqrt{1+s^2}\; ds = \\ &\quad = \frac{1}{4}\left[s(1+s^2)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{8}\left[s\sqrt{1+s^2} + \log\left(s + \sqrt{1+s^2}\right)\right]_0^{\sqrt{3}} = \\ &\quad = \frac{7\sqrt{3}}{4} - \frac{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}{8},\end{aligned}$$

e pertanto

$$\int_0^{3} \sqrt{t+t^2}\; dt = 2\int_0^{\sqrt{3}} s^2\sqrt{1+s^2}\; ds = \frac{7\sqrt{3}}{2} - \frac{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

Prova scritta del 30 giugno 1998

Esercizio 1 **(i)** Se $\lambda = 0$ risulta ovviamente $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, quindi $a_n \to 0$.
Se $\lambda > 0$, allora è immediato verificare che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$; inoltre essendo $\log(1+t) < t$ per ogni $t > 0$, si ha anche $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Quindi $\{a_n\}$, essendo decrescente e positiva, ha limite $L \geq 0$. Sostituendo nella relazione ricorrente, otteniamo $L = |\log(1+L)| = \log(1+L)$, da cui $L = 0$.
Infine, se $\lambda \in]-1, 0[$, si ha comunque $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$, e quindi, come in precedenza, si ha

$$a_{n+1} = |\log(1+a_n)| = \log(1+a_n) \leq a_n \quad \forall n \geq 1.$$

Ciò implica nuovamente che $a_n \to L \geq 0$ per $n \to \infty$, da cui, ancora, $L = 0$.
In definitiva, per qualunque $\lambda > -1$, la successione $\{a_n\}$ è infinitesima.

(ii) Sia $\lambda > 0$: allora la serie è a termini positivi. Notiamo che la funzione $\log(1+t)$ è concava in $]-1, \infty[$; quindi per ogni $t_0 > 0$ si ha

$$\log(1+t) \leq \frac{\log(1+t_0)}{t_0}\, t \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Ne segue

$$a_{n+p+1} = \log(1+a_{n+p}) \geq \frac{\log(1+a_p)}{a_p}\, a_{n+p} \quad \forall n, p \in \mathbf{N},$$

e quindi, iterando,

$$a_{n+p} \geq \left(\frac{\log(1+a_p)}{a_p}\right)^n a_p \quad \forall n, p \in \mathbf{N}.$$

Dunque sommando si trova che

$$\begin{aligned}\sum_{m=p}^{\infty} a_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p} \geq \\ \geq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\log(1+a_p)}{a_p}\right)^n a_p = \frac{1}{1 - \frac{\log(1+a_p)}{a_p}}\, a_p = \frac{a_p^2}{a_p - \log(1+a_p)}.\end{aligned}$$

Ora, ricordando che $\log(1+t) = t - t^2/2 + o(t^2)$ per $t \to 0$, per $p \to \infty$ si ha $a_p \to 0$ e dunque

$$\frac{a_p^2}{a_p - \log(1+a_p)} = \frac{a_p^2}{\frac{a_p^2}{2} + o(a_p^2)} \to 2;$$

ciò prova che il resto p-simo $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ non è infinitesimo per $p \to \infty$, cosicché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è necessariamente divergente.

Esercizio 2 **(i)** Si ha anzitutto

$$f(x) = \begin{cases} -x\ e^{-x} & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{se } x = 1, \\ x\ e^{-x} & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ x\ e^{x} & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ -(2+x)e^{x} & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

Dunque si vede subito che f è continua in tutti i punti $x_0 \neq 1$.

(ii) I punti in cui la derivabilità è dubbia sono, a priori, $x_0 = -1$ e $x_0 = 0$, mentre in $x_0 = 1$ la derivabilità manca certamente dato che in tale punto f è addirittura discontinua. Per $x \to -1$ si ha, usando il teorema di De L'Hôpital,

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x\ e^x + e^{-1}}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{(1+x)e^x}{1} = 0,$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{-(2+x)e^x + e^{-1}}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{-(3+x)e^x}{1} = -2;$$

quindi $f'(-1)$ non esiste.
Per $x \to 0$ si ha invece

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x\ e^{-x}}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x\ e^{x}}{x} = 1;$$

quindi $f'(0)$ esiste e vale 1.
Negli altri punti di $\mathbf{R}$ la derivata esiste e si calcola banalmente: si ha

$$f'(x) = \begin{cases} (-1+x)e^{-x} & \text{se } x > 1, \\ (x-1)e^{-x} & \text{se } 0 < x < 1, \\ (1+x)e^{x} & \text{se } -1 < x < 0, \\ (-3-x)e^{x} & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

(iii) La funzione f è continua salvo che nel punto 1. Inoltre essa è limitata su $\mathbf{R}$, in quanto risulta

$$|f(x)| \leq (2 + |x|)e^{-|x|} \quad \forall x \in \mathbf{R};$$

quindi f è Riemann integrabile in ogni intervallo $[-a,a]$, ed inoltre $|f|$ è integrabile in senso improprio su $\mathbf{R}$ per confronto con la funzione $(2+|x|)e^{-|x|}$. Pertanto anche f è integrabile in senso improprio su $\mathbf{R}$.
Calcoliamo l'integrale: si ha

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \\
&\quad = -\int_{-\infty}^{-1} (2+x)e^{x}\ dx + \int_{-1}^{0} x\ e^{x}\ dx + \int_{0}^{1} x\ e^{-x}\ dx - \int_{1}^{\infty} x\ e^{-x}\ dx = \\
&\quad = \left[-(2+x)e^{x}\right]_{-\infty}^{-1} + \int_{-\infty}^{-1} e^{x}\ dx + \left[x\ e^{x}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^{x}\ dx - \\
&\quad - \left[x\ e^{-x}\right]_{0}^{1} + \int_{0}^{1} e^{-x}\ dx + \left[x\ e^{-x}\right]_{1}^{\infty} - \int_{1}^{\infty} e^{-x}\ dx = \\
&\quad = -e^{-1} + \left[e^{x}\right]_{-\infty}^{-1} - e^{-1} - \left[e^{x}\right]_{-1}^{0} - e^{-1} - \left[e^{-x}\right]_{0}^{1} - e^{-1} + \left[e^{-x}\right]_{1}^{\infty} = \\
&\quad = -4e^{-1}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 3 Si ha, posto $\sqrt{t} = s$,

$$\int_0^1 \sqrt{t-t^2}\ dt = 2\int_0^1 s^2\sqrt{1-s^2}\ ds.$$

D'altra parte

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 s^2\sqrt{1-s^2}\ ds = \\
&\quad = \int_0^1 (s^2-1+1)\sqrt{1-s^2}\ ds = \int_0^1 \left[-(1-s^2)^{3/2} + \sqrt{1-s^2}\right] ds.
\end{aligned}
$$

Calcoliamo i due integrali all'ultimo membro, cominciando dal secondo. Si ha, integrando per parti,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\ ds &= \left[s\sqrt{1-s^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{s^2-1+1}{\sqrt{1-s^2}}\ ds = \\
&= 0 - \int_0^1 \sqrt{1-s^2}\ ds + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\ ds = \\
&= -\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\ ds + [\arcsin s]_0^1 = -\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\ ds + \frac{\pi}{2},
\end{aligned}
$$

da cui
$$\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\ ds = \frac{1}{2}\ \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$
Per l'altro integrale si ha, integrando nuovamente per parti,
$$\int_0^1 (1-s^2)^{3/2}\ ds = \left[s(1-s^2)^{3/2}\right]_0^1 + 3\int_0^1 s^2\sqrt{1-s^2}\ ds = 3\int_0^1 s^2\sqrt{1-s^2}\ ds.$$
Sostituendo, si ottiene
$$\int_0^1 s^2\sqrt{1-s^2}\ ds =$$
$$= \int_0^1 \left[-(1-s^2)^{3/2} + \sqrt{1-s^2}\right] ds = -3\int_0^1 s^2\sqrt{1-s^2}\ ds + \frac{\pi}{4};$$
quindi
$$\int_0^1 s^2\sqrt{1-s^2}\ ds = \frac{1}{4}\ \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16},$$
e pertanto
$$\int_0^1 \sqrt{t-t^2}\ dt = 2\int_0^1 s^2\sqrt{1-s^2}\ ds = \frac{\pi}{8}.$$

Prova scritta dell'11 settembre 1998

Esercizio 1 **(i)** Si ha
$$a_1 = \int_\lambda^{1+\lambda} \sqrt[4]{1+s^4}\ ds > \int_\lambda^{1+\lambda} s\ ds = \frac{1}{2}\left[(1+\lambda)^2 - \lambda^2\right] = \frac{1}{2} + \lambda\ ,$$
e analogamente, per ogni $n \in \mathbf{N}$,
$$a_{n+1} = \int_{a_n}^{1+a_n} \sqrt[4]{1+s^4}\ ds > \int_{a_n}^{1+a_n} s\ ds = \frac{1}{2}\left[(1+a_n)^2 - a_n^2\right] = \frac{1}{2} + a_n\ .$$
Di conseguenza, per induzione si ottiene subito che
$$A_n > \frac{n}{2} + \lambda \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

cosicché la successione $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$.

(ii) Osserviamo anzitutto che

$$a_{n+1} = \int_{a_n}^{1+a_n} \sqrt[4]{1+s^4}\ ds > \int_{a_n}^{1+a_n} 1\ ds = 1 \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

da cui, per ogni $n \in \mathbf{N}^+$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \int_{a_n}^{1+a_n} \sqrt[4]{1+s^4}\ ds < \\ &< \int_{a_n}^{1+a_n} \sqrt[4]{2s^4}\ ds = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left[(1+a_n)^2 - a_n^2\right] = \sqrt[4]{2}\left[\frac{1}{2} + a_n\right] \ ; \end{aligned}$$

quindi, per induzione,

$$a_n < \sqrt[4]{2}\left[\frac{n-1}{2} + a_1\right] \qquad \forall n \geq 2\ .$$

Ciò prova, per confronto con la serie armonica, che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ è divergente.

Esercizio 2 Si tratta di una forma indeterminata del tipo $-\infty+\infty$. D'altra parte possiamo scrivere

$$\log x + (\log|\log x|)^2 = \log x\left[1 + \frac{(\log|\log x|)^2}{\log x}\right] = \frac{1 + \frac{(\log|\log x|)^2}{\log x}}{\frac{1}{\log x}}\ .$$

Il denominatore di questa frazione tende a 0^+ per $x \to 0^+$, mentre il numeratore tende a 1 in quanto, usando ripetutamente il teorema di de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\log|\log x|)^2}{\log x} = \lim_{t\to-\infty} \frac{(\log|t|)^2}{t} = \lim_{t\to-\infty} 2\frac{\log|t|}{t} = \lim_{t\to-\infty} \frac{2}{t} = 0\ .$$

Pertanto il limite proposto è uguale a $-\infty$.

Esercizio 3 **(i)-(iii)** Si ha

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^2+2|y|}{x^2+y^2+1} \leq 1$$

(visto che $2|y| \leq 1+y^2$ per ogni $y \in \mathbf{R}$; in particolare si ha $f(x,y) = 1$ per $y = 1$ e $f(x,y) = -1$ per $x = 0$, $y = -1$. Ciò prova che

$$\sup_{\mathbf{R}^2} f = \max_{\mathbf{R}^2} f = 1, \qquad \inf_{\mathbf{R}^2} f = \min_{\mathbf{R}^2} f = -1.$$

(ii) La funzione f è di classe C^∞ e si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(y-1)^2}{(1+x^2+y^2)^2}\ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(1-y)\frac{x^2+1+y}{(1+x^2+y^2)}\ .$$

Quindi il gradiente di f si annulla se e solo se

$$\begin{cases} 2x(y-1)^2 = 0 \\ (1-y)(x^2+1+y) = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono

$$(0,-1), \qquad (x,1) \text{ per ogni } x \in \mathbf{R}.$$

Vi è dunque un'infinità di punti stazionari. Dal fatto che f ha massimo uguale a 1 e minimo uguale a -1, osservando che $f(x,1) = 1$ per ogni x e e $f(0,-1) = -1$, segue che tutti i punti $(x,1)$ sono di massimo (assoluto, quindi anche relativo) e che $(0,-1)$ è punto di minimo (assoluto, quindi anche relativo).
Non vi è dunque necessità di analizzare la natura della forma quadratica associata alla matrice Hessiana di f; tale forma quadratica, comunque è definita positiva nel punto $(0,-1)$ ed è semidefinita negativa nei punti $(x,1)$ (provare per credere!).

Prova scritta del 25 settembre 1998

Esercizio 1 **(i)** Le tre successioni possono essere scritte nella forma

$$e^{100n\log n}, \qquad e^{n^3\log 2}, \qquad e^{n^2\log 10},$$

ed è facile allora dedurre che l'infinito di ordine superiore è la seconda successione mentre quello di ordine inferiore è la terza.

(ii) Le tre successioni possono essere scritte nella forma

$$\frac{1}{e^{(\log n)^2\log\log n}}, \qquad \frac{1}{e^{n\log\log\log n}}, \qquad \frac{1}{e^{\log n\log\log n}},$$

ed è facile allora dedurre che l'infinitesimo di ordine inferiore è la terza successione mentre quello di ordine superiore è la seconda.

Esercizio 2 **(i)** La funzione $\sin x$ è crescente nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, quindi $1 - \sin x$ è decrescente e pertanto $f(x)$ è crescente in tale intervallo.
Dato che
$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty,$$
per il teorema dei valori intermedi l'immagine di f è la semiretta $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
(ii) Cerchiamo una soluzione $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dell'equazione $f(x) = y$, con $y \geq \frac{1}{2}$: si ha

$$f(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad \sin x = 1 - \frac{1}{y} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \arcsin\left(1 - \frac{1}{y}\right),$$

da cui
$$f^{-1}(y) = \arcsin\left(1 - \frac{1}{y}\right), \qquad y \geq \frac{1}{2}.$$

(iii) Per calcolare il limite proposto conviene cambiare variabile prendendo $x = f^{-1}(y)$: osservando che $f^{-1}(1) = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to1} \frac{f^{-1}(y) - y + 1}{(y-1)^2} = \\
&\quad = \lim_{x\to0} \frac{x - \frac{1}{1-\sin x} + 1}{\left(\frac{1}{1-\sin x} - 1\right)^2} = \\
&\quad = \lim_{x\to0} \frac{x(1-\sin x) - \sin x}{(\sin x)^2}(1 - \sin x) = \\
&\quad = \lim_{x\to0} -\frac{x \sin x}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 **(i)** L'insieme dei punti di discontinuità di g è esattamente $\{x > 0 : x = n \text{ oppure } x = n + \frac{1}{2},\ n \in \mathbf{N}^+\}$: infatti

$$\lim_{x\to n^-} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to n^+} g(x) = 3^{-n},$$

$$\lim_{x\to n+\frac{1}{2}^-} g(x) = 3^{-n}, \qquad \lim_{x\to n+\frac{1}{2}^+} g(x) = 0,$$

mentre nell'intorno di ogni altro punto $x > 0$ la g è costante.
(ii) La funzione g è limitata ed è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo della forma $[0, b]$ con $0 < b < \infty$, poiché in tale intervallo g ha

un numero finito di punti di discontinuità. Poiché g è non negativa, il suo integrale improprio su $[0, \infty[$ esiste, finito od infinito, e si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} g(x)\ dx &= \lim_{N\to\infty} \int_0^{N} g(x)\ dx = \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+\frac{1}{2}} 3^{-n} dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2}\ 3^{-n} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$