Analisi Matematica B - Compito del 9 luglio 2012

Esercizio 1. Si consideri la funzione di variabile reale

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 - 1)(x + 2)^2}.$$

(a) Si tracci un grafico approssimativo di f.

(b) Si calcoli

$$\int_0^1 f(x)\, dx.$$

Soluzione. (a) Fattorizzando il numeratore e semplificando, si ha

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)^2} = \frac{x-2}{(x+1)(x+2)^2}.$$

Quindi f si annulla solamente per $x = 2$ e diverge in valore assoluto per $x \to -1$ e per $x \to -2$. La sua derivata vale:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1)(x+2)^2 - (x-2)[(x+2)^2 + 2(x+2)(x+1)]}{(x+1)^2(x+2)^4} \\ &= \frac{(x+1)(x+2) - (x-2)(x+2+2x+2)}{(x+1)^2(x+2)^3} \\ &= -\frac{2x^2 - 5x - 10}{(x+1)^2(x+2)^3}. \end{aligned}$$

Le radici del numeratore sono i numeri reali

$$a = \frac{5 - \sqrt{105}}{4} \in]-2, -1[\quad \text{e} \quad b = \frac{5 + \sqrt{105}}{4} > 2.$$

Quindi

$$f'(x) = -2\frac{(x-a)(x-b)}{(x+1)^2(x+2)^3}$$

è positiva per $x \in]-\infty, -2[\cup]a, -1[\cup]-1, b[$ e negativa per $x \in]-2, a[\cup]b, +\infty[$. Infine

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

In conclusione: $f(x)$ tende a 0 per $x \to -\infty$, cresce strettamente su $]-\infty, -2[$, ha limite $+\infty$ in $x = -2$, decresce strettamente su $]-2, a]$, assume un minimo locale positivo in $x = a$, cresce strettamente su $[a, -1[$, ha limite sinistro $+\infty$ e limite destro $-\infty$ in $x = -1$, cresce strettamente su $]-1, b]$, assumendo il valore 0 in $x = 2$, raggiunge un massimo locale positivo in $x = b$, decresce strettamente su $[b, +\infty[$ e tende a 0 per $x \to +\infty$.

(b) Sappiamo che la decomposizione in frazione semplici della funzione $f(x)$ è della forma:

$$f(x) = \frac{x-2}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}, \tag{1}$$

con a, b, c numeri da determinare. Moltiplicando la (1) per $x + 1$ e valutando in $x = -1$ si trova $a = -3$. Moltiplicando la (1) per $(x + 2)^2$ e valutando in $x = -2$ si trova $c = 4$. Scegliendo $x = 0$ e sostituendo i valori di a e c in (1), si ricava $b = 3$. Quindi

$$f(x) = \frac{x-2}{(x+1)(x+2)^2} = -\frac{3}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \frac{4}{(x+2)^2}.$$

Perciò

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= -\int_0^1 \frac{3}{x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{3}{x+2}\,dx + \int_0^1 \frac{4}{(x+2)^2}\,dx \\
&= -3[\log|x+1|]_0^1 + 3[\log|x+2|]_0^1 + 4\Big[-\frac{1}{x+2}\Big]_0^1 \\
&= -3(\log 2 - \log 1) + 3(\log 3 - \log 2) + 4\Big(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\Big) \\
&= -6\log 2 + 3\log 3 + \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2. Sia (f_n) la successione di Fibonacci, definita da

$$\begin{cases} f_{n+2} = f_n + f_{n+1}, & \forall n \geq 0, \\ f_0 = f_1 = 1. \end{cases}$$

(a) Si dimostri l'identità

$$\frac{1}{f_n f_{n+2}} = \frac{1}{f_n f_{n+1}} - \frac{1}{f_{n+1} f_{n+2}}, \qquad \forall n \geq 0.$$

(b) Si mostri che la seguente serie è convergente e se ne calcoli la somma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_n f_{n+2}}.$$

Soluzione. (a) Per $n \geq 0$ risulta

$$\frac{1}{f_n f_{n+1}} - \frac{1}{f_{n+1} f_{n+2}} = \frac{f_{n+2} - f_n}{f_n f_{n+1} f_{n+2}} = \frac{f_{n+1}}{f_n f_{n+1} f_{n+2}} = \frac{1}{f_n f_{n+2}},$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato la legge ricorsiva della successione di Fibonacci.

(b) Grazie al punto (a), si tratta di una serie telescopica. Infatti la somma parziale k-esima vale

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{f_n f_{n+2}} &= \sum_{n=0}^{k} \Big(\frac{1}{f_n f_{n+1}} - \frac{1}{f_{n+1} f_{n+2}} \Big) \\ &= \frac{1}{f_0 f_1} - \frac{1}{f_1 f_2} + \frac{1}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_2 f_3} + \ldots + \frac{1}{f_k f_{k+1}} - \frac{1}{f_{k+1} f_{k+2}} \\ &= \frac{1}{f_0 f_1} - \frac{1}{f_{k+1} f_{k+2}}.\end{aligned}$$

Dato che la successione di Fibonacci diverge, l'ultimo addendo è infinitesimo e la somma parziale k-esima tende a

$$\frac{1}{f_0 f_1} = 1.$$

Concludiamo che la serie è convergente ed ha somma 1.

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$g(x) = e^{\cos x} - e \cos x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Si determinino i punti di massimo locale e di minimo locale di g.

(b) Si determinino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di g.

Soluzione. (a) È conveniente effettuare il cambio di variabile $t = \cos x$. Detto altrimenti, osserviamo che

$$g(x) = h(\cos x),$$

dove h è la funzione

$$h(t) := e^t - et.$$

Sappiamo che l'immagine della funzione $x \to \cos x$ è l'intervallo $[-1, 1]$. Dato che

$$h'(t) = e^t - e,$$

il fatto che la funzione esponenziale sia strettamente crescente implica che $h'(t) > 0$ per $t > 1$, $h'(1) = 0$ e $h'(t) < 0$ per $t < 1$. In particolare, la funzione h è strettamente decrescente sull'intervallo $[-1, 1]$. Ne segue che i punti di massimo locale per f sono gli x

per cui $\cos x = -1$ e che questi sono anche punti di massimo globale. Tali x sono tutti e soli i numeri della forma $x = (2k+1)\pi$, al variare di k in $\mathbb{Z}$. Invece, i punti di minimo locale per f sono gli x per cui $\cos x = 1$ e questi sono anche punti di minimo globale. Tali x sono tutti e soli i numeri della forma $x = 2k\pi$, al variare di k in $\mathbb{Z}$.

(b) Grazie all'analisi del punto (a), f raggiunge il suo valore massimo nei punti $x = (2k+1)\pi$, dove vale

$$\frac{1}{e} + e,$$

che è pertanto anche l'estremo superiore di f. Invece, f raggiunge il suo valore massimo nei punti $x = 2k\pi$, dove vale 0, che è pertanto anche l'estremo inferiore di f.