Analisi Matematica B - Compitino del 3 novembre 2011

Testi e soluzioni di entrambe le versioni

Esercizio 1A. Sia (x_n) la successione definita induttivamente da

$$\begin{cases} x_{n+2} = 7x_{n+1} - 10x_n, & \forall n \in \mathbb{N}, \\ x_0 = 4, \\ x_1 = 17. \end{cases}$$

Determinare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}.$$

Soluzione. La successione $x_n = t^n$ risolve l'equazione ricorsiva se e solamente se t è una radice del polinomio

$$t^2 - 7t + 10 = (t-2)(t-5).$$

Quindi la soluzione generale è

$$x_n = a \cdot 2^n + b \cdot 5^n,$$

e ricaviamo le costanti a, b dalle condizioni iniziali $x_0 = 4$, $x_1 = 17$, ossia risolvendo il sistema

$$\begin{cases} a + b = 4, \\ 2a + 5b = 17. \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema è $a = 1$, $b = 3$, quindi la successione (x_n) è data da

$$x_n = 2^n + 3 \cdot 5^n.$$

Perciò

$$\sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{2^n + 3 \cdot 5^n} = \sqrt[n]{5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3\right)} = 5\sqrt[n]{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3}.$$

Dato che $2/5 < 1$, si ha

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3 \longrightarrow 3, \qquad \text{per } n \to \infty,$$

e per quanto abbiamo visto (ad esempio, nell'Esercizio 2 del 6.10.2011) risulta

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3} \longrightarrow 1, \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Concludiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3} = 5.$$

Esercizio 1B. Sia (x_n) la successione definita induttivamente da

$$\begin{cases} x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n, & \forall n \in \mathbb{N}, \\ x_0 = 3, \\ x_1 = 11. \end{cases}$$

Determinare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}.$$

Soluzione. La successione $x_n = t^n$ risolve l'equazione ricorsiva se e solamente se t è una radice del polinomio

$$t^2 - 7t + 12 = (t-3)(t-4).$$

Quindi la soluzione generale è

$$x_n = a \cdot 3^n + b \cdot 4^n,$$

e ricaviamo le costanti a, b dalle condizioni iniziali $x_0 = 3$, $x_1 = 11$, ossia risolvendo il sistema

$$\begin{cases} a + b = 3, \\ 3a + 4b = 11. \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema è $a = 1$, $b = 2$, quindi la successione (x_n) è data da

$$x_n = 3^n + 2 \cdot 4^n.$$

Perciò

$$\sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{3^n + 2 \cdot 4^n} = \sqrt[n]{4^n \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2 \right)} = 4 \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2}.$$

Dato che $3/4 < 1$, si ha

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2 \longrightarrow 2, \qquad \text{per } n \to \infty,$$

e per quanto abbiamo visto (ad esempio, nell'Esercizio 2 del 6.10.2011) risulta

$$\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2} \longrightarrow 1, \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Concludiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} 4 \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2} = 4.$$

Esercizio 2A. Determinare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 25}.$$

Soluzione. Si tratta di una forma "zero su zero". Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x-1}+2$, troviamo

$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25} = \frac{x-1-4}{(x^2-25)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{x-5}{(x-5)(x+5)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{1}{(x+5)(\sqrt{x-1}+2)}.$$

Per $x \to 5$ il denominatore dell'ultima frazione tende a $(5+5)(\sqrt{5-1}+2) = 10(2+2) = 40$, quindi

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25} = \frac{1}{40}.$$

Esercizio 2B. Determinare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-16}.$$

Soluzione. Si tratta di una forma "zero su zero". Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x+5}+3$, troviamo

$$\frac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-16} = \frac{x+5-9}{(x^2-16)(\sqrt{x+5}+3)} = \frac{x-4}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x+5}+3)} = \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x+5}+3)}.$$

Per $x \to 4$ il denominatore dell'ultima frazione tende a $(4+4)(\sqrt{4+5}+3) = 8(3+3) = 48$, quindi

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-16} = \frac{1}{48}.$$

Esercizio 3. Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore e, se esistono, il massimo e il minimo dell'insieme

$$A = \{3a + 4b \,|\, a > 0,\ b > 0,\ ab = 1\}.$$

Soluzione. Per la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica, risulta

$$3a + 4b = \frac{6a+8b}{2} \geq \sqrt{(6a)(8b)} = \sqrt{48}\sqrt{ab} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}, \tag{1}$$

dove abbiamo usato il vincolo $ab = 1$. Inoltre vale l'uguaglianza se e solamente se $6a = 8b$, che, insieme al vincolo $ab = 1$, equivale a

$$a = \sqrt{\frac{4}{3}}, \qquad b = \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

La disuguaglianza (1) implica che $\inf A \geq 4\sqrt{3}$. Dato che per $a = \sqrt{4/3}$ e $b = \sqrt{3/4}$ si ha $3a + 4b = 4\sqrt{3}$, il numero $4\sqrt{3}$ appartiene all'insieme A, da cui

$$\min A = \inf A = 4\sqrt{3}.$$

Ponendo $b = 1/a$, si ha che per ogni $a > 0$ il numero

$$3a + 4b = 3a + \frac{4}{a}$$

appartiene all'insieme A. Dal fatto che

$$\lim_{a \to +\infty} \left(3a + \frac{4}{a} \right) = +\infty,$$

deduciamo che l'insieme A possiede elementi arbitrariamente grandi. Dunque

$$\sup A = +\infty$$

e l'insieme A non ha massimo.

Esercizio 3B. Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore e, se esistono, il massimo e il minimo dell'insieme

$$A = \{2a + 5b \,|\, a > 0,\ b > 0,\ ab = 1\}.$$

Soluzione. Per la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica, risulta

$$2a + 5b = \frac{4a + 10b}{2} \geq \sqrt{(4a)(10b)} = \sqrt{40}\sqrt{ab} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}, \tag{2}$$

dove abbiamo usato il vincolo $ab = 1$. Inoltre vale l'uguaglianza se e solamente se $4a = 10b$, che, insieme al vincolo $ab = 1$, equivale a

$$a = \sqrt{\frac{5}{2}}, \qquad b = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

La disuguaglianza (2) implica che $\inf A \geq 2\sqrt{10}$. Dato che per $a = \sqrt{5/2}$ e $b = \sqrt{2/5}$ si ha $2a + 5b = 2\sqrt{10}$, il numero $2\sqrt{10}$ appartiene all'insieme A, da cui

$$\min A = \inf A = 2\sqrt{10}.$$

Ponendo $b = 1/a$, si ha che per ogni $a > 0$ il numero

$$2a + 5b = 2a + \frac{5}{a}$$

appartiene all'insieme A. Dal fatto che

$$\lim_{a \to +\infty} \left(2a + \frac{5}{a} \right) = +\infty,$$

deduciamo che l'insieme A possiede elementi arbitrariamente grandi. Dunque

$$\sup A = +\infty$$

e l'insieme A non ha massimo.