

○ Esercizi 27.3.2012

1. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m 2^m}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3^m}{m^2} x^m, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!} x^m$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (1 + (-2)^m) x^m, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m-1}{m+1} x^m, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{\sqrt{m}} x^m$$

○ 2. Usando l'espressione esplicita per la somma delle serie $\sum_{m=0}^{\infty} m z^m$ e $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}$, determinare le somme delle serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m (2x)^m}{(x + \frac{1}{x})^m}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m+1}{m^2+m} 2^{-m} x^2,$$

specificando per quali x esse convergono.

3. Calcolare la somma della serie di potenze

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2 x^m,$$

○ specificando per quali $x \in \mathbb{R}$ esse convergono.

4. Trovare una serie di potenze la cui somma, in un opportuno intervallo, sia $\log(1+x-2x^2)$

5. Quanto deve essere grande k affinché la somma

$$4 \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

○ differisca da π meno di 10^{-6} ?

6 - Sfruttando il fatto che $\arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, si determini una serie di potenze che converga a π e si dica quanti termini di questa serie occorre sommare per ottenere un numero che differisca da π meno di 10^{-6} .

7 - Sia $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza positivo. Dimostrare che la derivata k -esima di f in 0 vale

$$f^{(k)}(0) = k! a_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

8 - Dimostrare le formule:

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \dots + \frac{1}{(4m)!} + \frac{1}{(4m+1)!} + \dots = \frac{e + \sin 1 + \cos 1}{2}$$

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} + \dots + \frac{1}{(4m+2)!} + \frac{1}{(4m+3)!} + \dots = \frac{e - \sin 1 - \cos 1}{2}$$