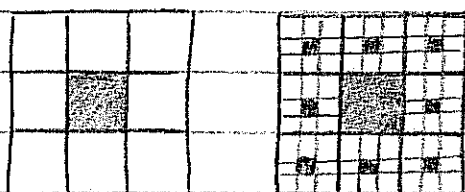


Esercizi 13.3.2012

1. Un quadrato di lato 1 viene suddiviso in 9 quadrati uguali e il quadrato centrale viene colorato. I rimanenti 8 quadrati vengono suddivisi allo stesso modo e il quadrato centrale di ciascuno viene colorato. Questo procedimento viene iterato infinite volte. Si calcoli l'area complessiva della superficie colorata.



2. Scrivere sotto forma di frazione il numero decimale periodico $3,4\bar{5} = 3,455555\dots$

3. Discutere la convergenza delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^3+1)}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^3}$$

4. Calcolare la somma delle seguenti serie telescopiche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1/2}{n^2(n+1)^2}$$

5. Dire per quali $x \geq 0$ converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{x^n}$$

6. Discutere la convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) ; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} e^{-n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}, \quad x \in \mathbb{R} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n!}{n^3}$$

7. Un baco parte da un'estremità di un metro di gomma lungo un metro e avanza verso l'altra estremità alla velocità di 10 cm al minuto. A ogni minuto, però, uno spirito maligno allunga il metro di 1 metro. Così, alla fine del primo minuto il baco è a 10 cm dal punto di partenza e a 90 cm da quello di arrivo. Ma, poiché è passato un minuto, il metro viene allungato di 1 metro: il baco mantiene la sua posizione relativa durante l'allungamento, a 10% della partenza e 90% dell'arrivo, quindi all'inizio del secondo minuto si trova a 20 cm dalla partenza e a 180 cm dall'arrivo. Riuscirà mai il baco a raggiungere la meta?