Esercizi 22.9.2011

1) Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

a) $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$

b) $\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2 \qquad \forall x \neq 0$

c) $\left| x + \frac{a}{x} \right| \geq 2\sqrt{a} \qquad \forall x \neq 0, \ a \geq 0$

d) $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

e) $\min\{a,b\} \leq \frac{2}{a^{-1}+b^{-1}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max\{a,b\}$

per ogni $a, b > 0$.

2) Siano S_1 e S_2 le aree delle due parti in cui una retta divide un cerchio di raggio 1. Trovare il più grande valore possibile del prodotto $S_1 S_2$

3) Dimostrare che tra tutti i parallelepipedi di volume 1 il cubo è quello di area totale minima

4) Dimostrare la disuguaglianza aritmetico-geometrica per 3 numeri seguendo questa traccia:

a) Se $x+y+z=0$ allora $x^3+y^3+z^3 = 3xyz$

b) Fattorizzare $x^3+y^3+z^3-3xyz$

c) Concludere

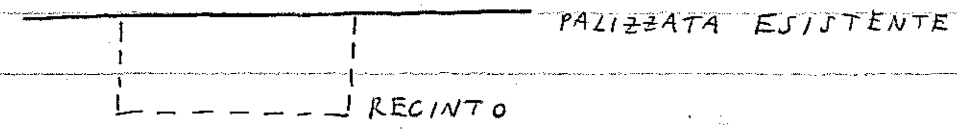
5) Quanto devono essere lunghi gli spigoli di un parallelepipedo di volume 1, in modo che sia minima la lunghezza del cammino più breve lungo la superficie tra un qualunque suo vertice e il suo opposto?

6) Dimostrare la disuguaglianza aritmetico-geometrica per n numeri seguendo questa traccia:

a) Sia A la media aritmetica degli n numeri. Se tra questi ve ne sono 2, diciamo a e b, tali che $a < A < b$, allora rimpiazzando a con A e b con $b - A + a$ la media aritmetica degli n numeri resta la stessa, mentre quella geometrica sale.

b) Iterando il procedimento del punto (a) ci riduciamo, in un numero finito di passi, al caso in cui tutti i numeri sono uguali a A.

7) Possediamo legname per 30 metri di recinzione e vogliamo costruire un recinto rettangolare appoggiandoci ad una palizzata già esistente, come in figura. Come farlo in modo da ottenere area massima?



8) Provare e dimostrare per induzione le seguenti disuguaglianze, valide $\forall n \geq 1$.

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4} - \frac{1}{4n}$$