FUNZIONI ESPONENZIALI, LOGARITMICHE E ALLOMETRIA

Giacomo Tommei

e-mail: *giacomo.tommei@unipi.it*

web: *people.unipi.it/tommei*

Colture batteriche

Piastra (o capsula) di Petri

- Recipiente piatto di vetro o plastica di forma cilindrica utilizzato per la crescita di colture cellulari.
- Inventata da Julius Richard Petri, 1877.
- Dimensioni: diametro 50-100 mm, altezza di 15 mm.

Immaginate la crescita di un'alga a partire da una singola cellula in una piastra di Petri. Nel tempo la cellula si divide in due (o muore), e poi ogni nuova cellula si divide a sua volta in due e così via.
Quindi il numero totale di cellule nella capsula di Petri NON cresce linearmente (in modo additivo) nel tempo, ma in modo **moltiplicativo** (raddoppiando).

Crescita esponenziale

Esempio

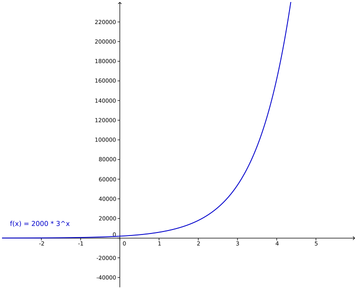
In una coltura batterica, il numero di batteri triplica ogni ora. Se all'inizio dell'osservazione la coltura contiene 2000 *batteri, quanti ne conterrà dopo* 4 *ore?*

Se al tempo $t = 0$ (tempo dell'osservazione) la coltura contiene 2000 batteri, al tempo $t = 1$ h ne conterrà 6000, al tempo $t = 2$ h ne conterrà 18000 e così via fino al tempo $t = 4$ h quando ne conterrà 162000. Questa crescita può essere espressa attraverso la legge

$$\boxed{n(t) = n_0 \cdot 3^t = 2000 \cdot 3^t}$$

Crescita esponenziale

La funzione $n(t)$ è una **funzione esponenziale**, la variabile indipendente t compare infatti ad esponente.



Funzioni esponenziali

Definizione

Fissato un **numero reale positivo** a, *ad ogni numero reale* x *si può associare il numero reale* a^x: *abbiamo così definito una funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *tale che*

$$\boxed{f(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

- Se $a = 1$ allora la funzione f è costante per ogni $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 1^x = 1$.
- Se a è positivo e diverso da 1 la funzione f si dice **funzione esponenziale di base** a.

Potenze a esponente reale

Il simbolo h^k ha significato nell'insieme dei numeri reali nei seguenti casi.

- Se l'esponente k è intero strettamente positivo, per ogni $h \in \mathbb{R}$
- Se k è intero, ma negativo o nullo, per h reale non nullo.
- Se $h = 0$, allora 0^k è definito solo per $k > 0$, e vale 0.
- Nei casi rimanenti, ovvero esponente k non intero e base $h \neq 0$, h^k è definita solo se $h > 0$.

Funzioni esponenziali - Proprietà

- La funzione esponenziale è definita su tutto l'insieme dei numeri reali ed assume valori positivi, ovvero il suo dominio è $\mathbb{R}$, mentre la sua immagine è $\mathbb{R}^+$.
- La funzione esponenziale è monotona:
  - **crescente**, se $a > 1$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

  - **decrescente**, se $0 < a < 1$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

Funzioni esponenziali - Proprietà

- Poiché la funzione esponenziale è monotona, essa è anche invertibile e la sua inversa è una funzione logaritmica:

$$f(x) = a^x \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \log_a x$$

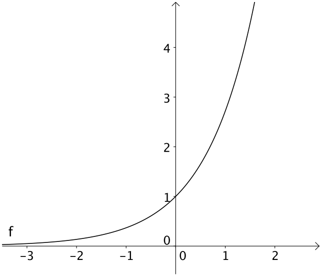
- Una funzione esponenziale molto utilizzata è $f(x) = e^x$, quella che ha come base il **numero di Nepero** e. Tale numero è irrazionale (un suo valore approssimato è 2.71283) e compare in molte questioni matematiche; è probabile che tu abbia visto la sua definizione come limite della successione

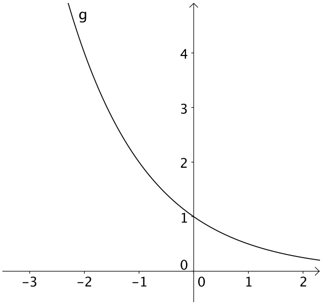
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

al tendere di n all'infinito.

Funzioni esponenziali - Grafici

Sinistra: funzione esponenziale $f(x) = e^x$ con base maggiore di 1.
Destra: funzione esponenziale $g(x) = (1/2)^x$ con base minore di 1.





Equazione esponenziale elementare

Definizioni

- *Si dice* **equazione esponenziale** *ogni equazione in cui l'incognita appare come esponente di almeno uno dei suoi termini.*
- **Equazione esponenziale elementare** *($a > 0$ e $a \neq 1$):*

$$\boxed{a^x = b}$$

Se $b > 0$ e qualunque sia $a > 0$ (purché $a \neq 1$), l'equazione esponenziale elementare $a^x = b$ ammette **una e una sola soluzione**, la quale è

- **positiva**, se a e b sono entrambi maggiori di 1, o entrambi minori di 1;
- **negativa**, se uno dei due numeri a e b è maggiore di 1 e l'altro minore di 1;
- **uguale a 0**, se $b = 1$.

Equazioni esponenziali elementari

Esempio

Risolviamo:

$$a)\quad 3^x = \frac{1}{243} \qquad b)\quad (1/2)^x = 8 \qquad c)\quad 5^x = 27$$

a)

$$3^x = \frac{1}{243} \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = \frac{1}{3^5} = 3^{-5} \quad \Leftrightarrow \quad x = -5$$

b)

$$(1/2)^x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad (1/2)^x = 2^3 = ((1/2)^{-1})^3 = (1/2)^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad x = -3$$

c)

$$5^x = 27 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ldots \quad \textbf{servono i logaritmi!}$$

Logaritmi

Definizioni

- *Dati due numeri positivi a e b, con $a \neq 1$, l'equazione $a^x = b$ ammette una e una sola soluzione. Questa soluzione si chiama* **logaritmo in base a di b** *e si indica con $\log_a b$.*

$$\boxed{a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b}$$

- *Dati due numeri positivi a e b, con $a \neq 1$, si chiama* **logaritmo in base a del numero b** *l'esponente a cui si deve elevare la base a per ottenere b.*

Il numero b si chiama **argomento** del logaritmo e deve essere un numero positivo, in quanto $a^x > 0$ per ogni x reale. Conseguenza: **non è possibile calcolare nell'insieme dei numeri reali il logaritmo di zero o di un numero negativo**.

Logaritmi

Esempio

Calcoliamo:

a) $\log_5 625$

b) $\log_{1/3} 27$

a) *Il numero* 625 *è una potenza della base* 5*, infatti* $625 = 5^4$*, quindi per definizione di logaritmo si ha*

$$\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$$

b) *Il numero* 27 *è una potenza del* 3*,* $27 = 3^3$*, così come la base* $1/3$*,* $1/3 = 3^{-1}$*, quindi l'esponente a cui devo elevare la base* 3^{-1} *per ottenere l'argomento* 3^3 *è* -3*:*

$$\log_{1/3} 27 = \log_{3^{-1}} 3^3 = -3$$

Logaritmi - Proprietà

- **Non esiste, nell'insieme dei numeri reali, il logaritmo di un numero non positivo**.
- La base del logaritmo deve necessariamente essere compresa strettamente tra 0 e 1 ($0 < a < 1$) oppure maggiore di 1 ($a > 1$).
- $\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0$
- $b = c \quad (b, c > 0) \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b = \log_a c$ (la funzione logaritmica è iniettiva)
- $\log_a b > 0$ se $a > 1$ e $b > 1$ oppure $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$, $\log_a b < 0$ se $a > 1$ e $0 < b < 1$ oppure $0 < a < 1$ e $b > 1$

Logaritmi - Proprietà

- Il logaritmo del **prodotto** di due numeri positivi b e c è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori:

$$\log_a b\, c = \log_a b + \log_a c$$

- Il logaritmo del **quoziente** di due numeri positivi b e c è uguale alla differenza dei logaritmi dei singoli fattori:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

- Il logaritmo di una **potenza** ad esponente reale e base positiva è uguale al prodotto dell'esponente della potenza per il logaritmo della base della potenza:

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

Come conseguenza se si ha il logaritmo di una radice si ottiene:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{1/n} = \frac{1}{n} \log_a b$$

Logaritmi - Proprietà

- Il logaritmo di una **potenza** ad esponente reale e base positiva è uguale al prodotto dell'esponente della potenza per il logaritmo della base della potenza:
  $$\log_a b^c = c \log_a b$$
  Come conseguenza se si ha il logaritmo di una radice si ottiene:
  $$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{1/n} = \frac{1}{n} \log_a b$$
- Se come base ho una potenza è possibile semplificare il calcolo del logaritmo in questo modo:
  $$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$$

Logaritmi - Proprietà

- Date due possibili basi a e b vale la seguente relazione:

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

Dalla precedente relazione segue immediatamente

$$\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$$

Funzioni logaritmiche

Fissato un numero positivo qualsiasi x ed un numero positivo a diverso da 1, esiste il logaritmo in base a di x; in particolare, ad ogni valore positivo di x corrisponde uno ed un solo valore di $\log_a x$.

Definizione

Funzione logaritmica di base a *($a > 0$ e $a \neq 1$):*

$$\boxed{f(x) = \log_a x}$$

Funzioni logaritmiche - Proprietà

- La funzione logaritmica **non** è definita su tutto l'insieme dei numeri reali, il suo dominio è $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, mentre la sua immagine è $\mathbb{R}$.
- La funzione logaritmica è monotona:
  - **crescente**, se $a > 1$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$$

  - **decrescente**, se $0 < a < 1$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$$

Funzioni logaritmiche - Proprietà

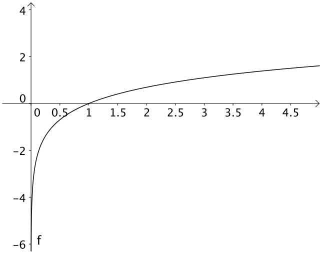
- La funzione logartimica assume il valore 0 quando $x = 1$.

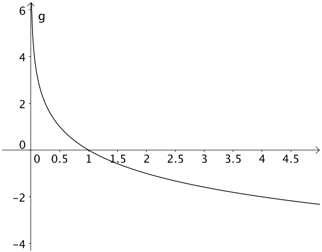
  Se la base a è maggiore di 1, è positiva per $x > 1$ e negativa per $0 < x < 1$.

  Se la base a è compresa strettamente tra 0 e 1, la funzione logaritmica è positiva per $0 < x < 1$ e negativa per $x > 1$.
- Poiché la funzione logaritmica è monotona, essa è anche invertibile e la sua inversa è una funzione esponenziale.
- Una funzione logaritmica molto utilizzata è la funzione **logaritmo naturale**, $y = \ln x$, che ha come base il numero e; tale funzione è l'inversa della funzione esponenziale $y = e^x$.

Funzioni logaritmiche - Grafici

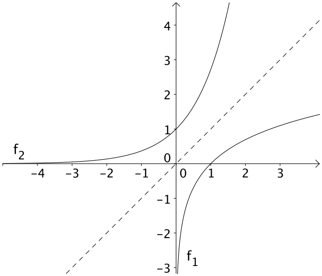
Sinistra: funzione logaritmica $f(x) = \ln(x)$ con base e (maggiore di 1).
Destra: funzione logaritmica $g(x) = \log_{1/2} x$ con base minore di 1.





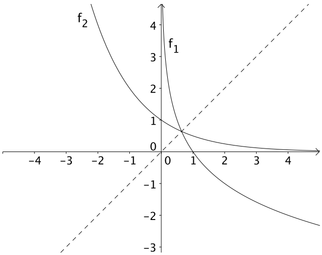
Funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzione logaritmica con base naturale, $f_1 = \ln(x)$, e la sua inversa $f_2 = e^x$; i due grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante $y = x$.



Funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzione logaritmica con base minore di 1, $f_1 = \log_{1/2} x$, e la sua inversa $f_2 = (1/2)^x$; i due grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante $y = x$.



Disequazioni esponenziali

Esempio

Risolviamo

$$2^{x+1} \leq 7^{x-1}$$

In questa disequazione le basi sono diverse, ha cioè una forma $a^{f(x)} \leq b^{g(x)}$*; dobbiamo quindi passare ai logaritmi, scegliamo ad esempio il logaritmo con base naturale e sfruttiamo il fatto che è una funzione crescente:*

$$2^{x+1} \leq 7^{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad \ln 2^{x+1} \leq \ln 7^{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\,\ln 2 \leq (x-1)\,\ln 7$$

Abbiamo così una semplice disequazione lineare:

$$x\,\ln 2 + \ln 2 \leq x\,\ln 7 - \ln 7 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(\ln 2 - \ln 7) \leq -(\ln 2 + \ln 7) \quad \Leftrightarrow$$

$$x \geq -\frac{\ln 2 + \ln 7}{\ln 2 - \ln 7} = \frac{\ln 2 + \ln 7}{\ln 7 - \ln 2} = \frac{\ln 14}{\ln(7/2)}$$

Attenzione, è stato cambiato il verso della disequazione in quanto si è diviso per $\ln 2 - \ln 7$ *che è un numero negativo.*

Disequazioni esponenziali

Esempio

Risolviamo

$$3 \cdot 5^x - 25^x - 2 > 0$$

Operando la sostituzione $5^x = t$ *la disequazione si trasforma in una di secondo grado*

$$3 \cdot 5^x - 25^x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(5^x)^2 + 3 \cdot 5^x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -t^2 + 3\,t - 2 > 0$$

che ha come insieme di soluzioni $1 < t < 2$. *L'insieme delle soluzioni della disequazione di partenza si ottiene allora risolvendo il sistema*

$$\begin{cases} 5^x > 1 & \Leftrightarrow \quad x > 0 \\ 5^x < 2 & \Leftrightarrow \quad x < \log_5 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 < x < \log_5 2$$

Disequazioni logaritmiche

Esempio

Risolviamo

$$\log_{1/2}(x-1) < \log_{1/2}(2\,x-3)$$

Iniziamo col calcolare l'insieme di esistenza della disequazione:

$$\begin{cases} x-1>0 & \Leftrightarrow \quad x>1 \\ 2\,x-3>0 & \Leftrightarrow \quad x>3/2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x>3/2$$

La disequazione proposta stavolta presenta logaritmi con una base minore di uno quindi, poiché la funzione $y=\log_{1/2} x$ *è monotona decrescente, si ha:*

$$\log_{1/2}(x-1) < \log_{1/2}(2\,x-3) \quad \Leftrightarrow \quad x-1 > 2\,x-3 \quad \Leftrightarrow \quad x<2$$

L'insieme delle soluzioni è allora (ricordati della condizione di esistenza)

$$\{x \in \mathbb{R} : 3/2 < x < 2\}$$

Emivita di un farmaco

Definizione

*L'***emivita** *di una sostanza è il tempo in cui una quantità N della sostanza impiega a dimezzarsi diventando $N/2$.*

In farmacocinetica, (studio degli effetti e dei cambiamenti dei farmaci in un individuo), si ipotizza che la quantità di farmaco in una persona decada esponenzialmente. Se $C(t)$ è la quantità di farmaco nel flusso sanguigno (in mg) al tempo t (in giorni), e C_0 è la quantità iniziale del farmaco nel sangue (quantità di farmaco somministrata in milligrammi), allora possiamo scrivere

$$\boxed{C(t) = C_0\, e^{-k\,t} \quad ,}$$

dove $k > 0$ è la *costante di decadimento*. Più alto è il valore di k, più velocemente il farmaco in circolo decade.

a) Se il farmaco ha un'emivita di 10 giorni, qual è il valore di k?
b) Quale percentuale della quantità di farmaco somministrato rimane nel sangue dopo 4 ore?

Emivita di un farmaco

$$\boxed{C(t) = C_0\, e^{-k\,t}}$$

a) Se il farmaco ha un'emivita di 10 giorni, significa che per $t = 10$, il rapporto $C(10)/C_0$ vale $1/2$, quindi

$$\frac{C(10)}{C_0} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-10\,k} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{10\,k} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 10\,k = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \quad k = \ln 2/10 \simeq 0.069$$

Emivita di un farmaco

$$\boxed{C(t) = C_0\, e^{-0.069\, t}}$$

b) Dopo quattro ore, equivalenti a 1/6 di giorno, il rapporto $C(1/6)/C_0$ vale

$$e^{-0.069\cdot(1/6)} = e^{-0.0115} \simeq 0.989$$

quindi è rimasto il 98.9% del farmaco.

Consumo di ossigeno nel salmone

Alcuni biologi hanno scoperto che il consumo di ossigeno di un salmone (calcolato in mg di ossigeno per kg di massa corporea per ora) aumenta esponenzialmente con la velocità del salmone secondo la funzione

$$\boxed{f(x) = 100\, e^{0.6\, x}}$$

dove x è la velocità in metri al secondo.

a) Quanto vale il consumo di ossigeno quando il salmone non si muove?

b) Quanto vale il consumo di ossigeno alla velocità di 1 m/s?

c) Se un salmone sta nuotando a 1 m/s, quanto più velocemente deve nuotare per raddoppiare il consumo di ossigeno?

Consumo di ossigeno nel salmone

$$\boxed{f(x) = 100\, e^{0.6\, x}}$$

a) Quando il salmone non si muove si ha $x = 0$ e di conseguenza $f(0) = 100\, e^0 = 100\ \mathrm{mg}_{O_2}/(\mathrm{kg}\cdot\ \mathrm{h})$.

b) Il consumo di ossigeno alla velocità di 1 m/s vale

$$f(1) = 100\, e^{0.6} \simeq 182.2 \quad \mathrm{mg}_{O_2}/(\mathrm{kg}\cdot \mathrm{h})$$

c) Per rispondere a questa domanda dobbiamo impostare la seguente equazione:

$$f(x) = 2\, f(1) \quad \Leftrightarrow \quad 100\, e^{0.6\, x} = 200\, e^{0.6} \quad \Leftrightarrow \quad e^{0.6\,(x-1)} = 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$0.6\,(x-1) = \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln 2}{0.6} + 1 \simeq 2.16\, \mathrm{m/s}$$

Legge di Beer-Lambert

La quantità di luce influenza molti processi biologici ed è tipicamente misurata come densità di flusso radiante che arriva a una superficie, la cui unità di misura è fotoni per mm^2 di area per minuto.

Consideriamo $I(x)$ come la densità di flusso radiante della luce in un mezzo (ad es. acqua o vetro) alla distanza x (in metri) dalla superficie in cui la luce entra nella materia.

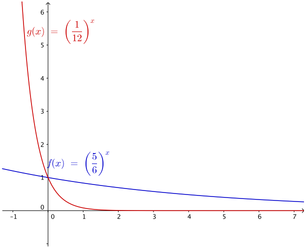
La **legge di Beer-Lambert** stabilisce che se $I_0 = I(0)$ è la densità del flusso radiante della luce alla superficie allora

$$\boxed{I(x) = I_0\, a^x \quad ,}$$

dove $0 < a < 1$ dipende dal mezzo.

Legge di Beer-Lambert

Il valore di a determina quanto il mezzo è efficace nell'assorbire o ridurre la trasmissione della luce. Quanto più il valore a è vicino a 1, tanto più alto sarà il valore I in funzione di valori x più alti (ad es. acqua più profonda). Se a è vicino a 1, allora l'acqua è molto limpida. Se a è molto vicino a 0, allora l'acqua è molto torbida.



Legge di Beer-Lambert

Supponiamo che il sole stia splendendo su un lago con acqua torbida, dove la densità di flusso radiante della luce a 1 metro di profondità è 1/4 di quella alla superficie.

a) Calcolate la costante a della legge di Beer-Lambert per l'acqua del lago.

b) Trovate la densità di flusso radiante a 1.5 metri sotto la superficie, sapendo che la densità di flusso radiante in superficie è $2000\,\mu\text{mol}\, m^{-2}\, s^{-1}$.

Legge di Beer-Lambert

$$\boxed{I(x) = I_0\, a^x \quad ,}$$

a) Se il rapporto $I(1)/I_0$ vale in $1/4$ si ha $a = 1/4$.

b) Sappiamo che $I_0 = 2000\,\mu\text{mol}\, m^{-2}\, s^{-1}$ e $a = 1/4$, quindi

$$I(1.5) = 2000\,(1/4)^{1.5} = 2000 \cdot 0.125 = 250 \quad \text{mol}\, m^{-2}\, s^{-1}$$

Funzioni allometriche

Una relazione tra due variabili che emerge continuamente in biologia è quella allometrica. Due variabili x e y hanno una relazione allometrica se

$$\boxed{y = a\,x^b}$$

dove a e b sono costanti reali.
Relazioni allometriche descrivono differenti aspetti di un singolo organismo:

- Lunghezza e volume
- Superficie corporea e volume
- Peso corporeo e peso del cervello
- Peso corporeo e volume del sangue

Funzioni allometriche

Nel rapporto tra peso dell'organismo e peso dello scheletro, l'esponente più spesso osservato nelle misure sperimentali è $p \simeq 2/3$.

La potenza $p \simeq 3/4$ si presenta con una certa frequenza nelle misure di uno stesso organo in specie diverse (**misure interspecifiche**), ma anche nei confronti tra organi diversi all'interno della stessa specie (**misure intraspecifiche**)

Esercizio 16 - Elefanti

È stato determinato che la superficie del corpo di un elefante può essere stimata come una funzione allometrica della lunghezza della proboscide. Nel caso degli elefanti africani, l'esponente allometrico è 0.74. Se un determinato elefante ha una superficie corporea di 900 cm^2 e una lunghezza della proboscide di 180 cm, qual è la superficie attesa di un elefante con una proboscide lunga 210 cm?

Esercizio 16 - Elefanti

Indichiamo con x la lunghezza della proboscide e con y la superficie corporea. Conoscendo il valore del coefficiente allometrico si ha

$$y = a\,x^{0.74}$$

Calcoliamo a sapendo che ad una superficie corporea di 900 cm^2 corrisponde una lunghezza della proboscide di 180 cm:

$$900 = a\,180^{0.74} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{900}{180^{0.74}} \simeq 19.29$$

La funzione allometrica è allora $y = 19.29\,x^{0.74}$. Quindi un elefante con una proboscide lunga 210 cm avrà una superficie attesa pari a

$$19.29\,210^{0.74} \simeq 1009 \quad \mathrm{cm}^2$$

Modello di Von Bertalanffy

- È uno dei primi modelli di crescita tumorale proposto intorno agli anni '60 del secolo scorso (*www.ms.uky.edu/~ma138/Spring13/art1.pdf*)
- Gli elementi funzionali di un organismo sono assunti come processi continui di interazione, in cui si sommano accrescimento e decadimento. Accrescimento e decadimento sono modellizzati mediante funzioni potenza.
- Bertalanffy propone di definire il tasso di crescita di un tumore di massa m, nel modo seguente

$$\boxed{T(m) = a\,m^{\alpha} - b\,m^{\beta}}$$

dove a, b, α e β sono costanti positive.

Modello di Von Bertalanffy

- $T(m)$ è la somma di due funzioni potenza, la prima $a\,m^{\alpha}$ rappresenta l'accrescimento della massa tumorale e porta un contributo positivo a $T(m)$, l'altra $-b\,m^{\beta}$ rappresenta il decadimento, la massa di tumore che si degrada per morte cellulare nell'unità di tempo e porta un contributo negativo.
- Si assume $\beta = 1$: la mortalità delle cellule è proporzionale al numero delle cellule stesse.
- Si assume $\alpha = 2/3$: tumore approssimativamente sferico, crescita proporzionale alla misura della superficie (la quantità di nutrimento arriva alle cellule tumorali attraverso di essa). Poiché il raggio r del tumore è proporzionale a $V^{1/3}$, l'area della superficie è proporzionale a $V^{2/3}$. Supponendo la densità costante, si ottiene lo stesso esponente anche per la dipendenza dalla massa.

Modello di Von Bertalanffy

$$\boxed{T(m) = a\,m^{2/3} - b\,m}$$

- La funzione $T(m)$ ha significato se e solo se $m \geq 0$.
- Studiamo quando il tasso di crescita è positivo:

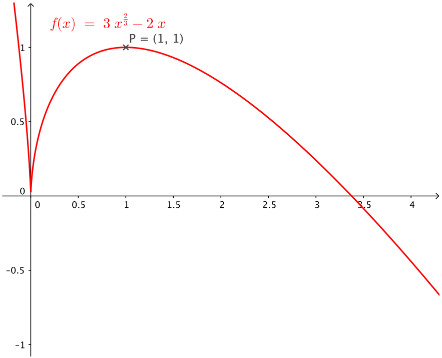
$$a\,m^{2/3} - b\,m > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\,(a\,m^{-1/3} - b) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\,m^{-1/3} > b \quad \Leftrightarrow$$

$$m^{-1/3} > b/a \quad \Leftrightarrow \quad m^{1/3} < a/b \quad \Leftrightarrow \quad m < (a/b)^3$$

- Il modello predice quindi che il tumore ha una crescita limitata, non sorpassa la dimensione critica $m = (a/b)^3$.

Modello di Von Bertalanffy - Esempio

$$\boxed{T(m) = 3\,m^{2/3} - 2\,m}$$



Grafici logaritmici e semi-logaritmici

I dati possono essere mostrati con diversi tipi di scale sugli assi cartesiani.

Grafici logaritmici

- Asse delle ascisse : $\log_a x$
- Asse delle ordinate : $\log_a y$

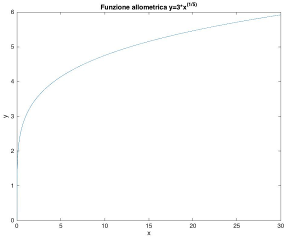
Grafici semi-logaritmici

- Asse delle ascisse : x
- Asse delle ordinate : $\log_a y$

Grafico logaritmico - Esempio

Funzione allometrica: $y = 3\,x^{4/5}$
Applicando il logaritmo naturale ad entrambi i membri si ottiene:

$$\ln y = \ln(3\,x^{4/5}) \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = \ln 3 + \frac{4}{5}\,\ln x$$



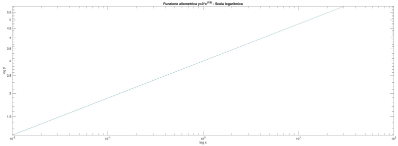


Grafico semi-logaritmico - Esempio

Funzione esponenziale: $y = 2 \cdot 3^x$
Applicando il logaritmo naturale ad entrambi i membri si ottiene:

$$\ln y = \ln(2 \cdot 3^x) \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = \ln 2 + x \, \ln 3$$