1. Diario approssimativo delle lezioni corso di matematica per i beni culturali, anno 2007-2008: lezioni di Andrea Maffei

Lezione 1; gio. 15/11; 2 ore.
Successioni.
Successioni definite per induzione.
Successioni aritmetiche e successioni geometriche.
Sommatorie.
Somma di una successione aritmetica.

Lezione 2; lun. 19/11; 2 ore.
Somma di una successione geometrica.
Limite di una successione $\lim a_n = \ell$.
Limite di $1/b^n$ per $b > 1$, limite di $1/n^b$ per $b > 0$.
Proprietà algebriche dei limiti.
Esempi di calcolo di limiti di successioni.
Successioni che tendono a $+\infty$.

Lezione 3; gio. 22/11; 2 ore.
Limiti di funzioni per x che tende a $+\infty$.
$\lim_{x\to\infty} a^x$ e $\lim_{x\to\infty} x^a$.
Limiti per x che tende ad x_0 da destra o da sinistra.
Prorietà elementari dei limiti di funzioni: limite della somma, del prodotto, del reciproco.

Lezione 4; lun. 26/11; 2 ore.
Esempi di calcolo di limiti.
Funzioni continue.
Continuità di x^n.
Limite di una funzione composta.

Lezione 5; gio. 29/11; 2 ore.
Esercizi sui limiti.
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ (solo enunciato e esempi).
Derivata di una funzione.
Retta tangente.
Derivata della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni.
Derivata della funzione composta.
Derivata di x^a e di e^x e di seno e coseno.

Lezione 6; lun. 3/12; 2 ore.
Esempi di calcolo di derivate.
Segno della derivata e crescita della funzione.

Lezione 7; gio. 6/12; 2 ore.
Massimi e minimi locali e massimi e minimi globali.
Calcolo di massimi e minimi.
Studio di funzioni.

Lezione 8; lun. 10/12; 2 ore.
Regola di de l'Hôpital.
esempi di studio di funzioni.

Lezione 9; gio. 13/12; 2 ore.
compito d'esonero.

2. Esercizi giovedì 15 novembre

Esercizio 1. Scrivere il termine generale della successione:

$$2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, \cdots$$

Esercizio 2. Scrivere il termine generale della successione:

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, \cdots$$

Esercizio 3. Sia a_n la successione definita per induzione da $a_0 = 3$ e $a_{n+1} = a_n + 7$. Scrivere il termine generale della successione.

Esercizio 4. Sia a_n la successione definita per induzione da $a_0 = 4$ e $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$. Scrivere il termine generale della successione.

Esercizio 5. Calcolare le seguenti sommatorie:

$$\sum_{i=0}^{12} (i-6) \qquad \sum_{i=1}^{12} i \qquad \sum_{i=3}^{7} 2^i.$$

3. Esercizi giovedì 22 novembre

Esercizio 6. Calcolare il limite delle seguenti successioni:

$$\frac{\sqrt{n+3}}{n+12} \qquad \frac{2^n}{n}$$

Esercizio 7. Calcolare il limite delle seguenti successioni:

$$\frac{3\,n^2+4}{5\,n^2+7\,n+1} \qquad \frac{3\,n^2+4}{n^3+1} \qquad \frac{3\,n^2+4}{n+1}.$$

Esercizio 8. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Definire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Distinguere tre casi $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ è finito, + infinito e − infinito.

Esercizio 9.

(1) Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e f è sempre positiva e $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, cosa si può dire di $\lim_{x\to0}(x^2-1)f(x)$?
(2) Se $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to0} g(x) = \infty$ cosa si può dire del limite $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)$

Esercizio 10. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)\frac{1}{x^3+5} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+3}{x^2+5} \qquad \lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x-1}.$$

Esercizio 11. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x\to1^+}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}+2}{e^{\frac{1}{x-1}}+3} \qquad \lim_{x\to1^-}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}+2}{e^{\frac{1}{x-1}}+3}.$$

4. Esercizi giovedì 29 novembre

Esercizio 12. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1} \qquad \lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}.$$

Esercizio 13. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to0} 2^{\frac{\sin x}{x}} \qquad \lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4} \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin(e^x-1)}{x}.$$

Esercizio 14. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{(\sin x)^2}-1}{x} \qquad \lim_{x\to0^+}\sin x\,(\log x)^2 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Esercizio 15. Calcolare la derivata di

$$x^2+2x \qquad x+\sqrt{x}.$$

5. Esercizi lunedì 3 dicembre

Studiare le seguenti funzioni (sono quelle che trovate sul libro in caso qualcuno non lo avesse)

(1) $f(x) = 2(1 - e^{-x})$
(2) $f(x) = x + \sin x$
(3) $f(x) = \frac{1}{2}x + \sin x$
(4) $f(x) = e^{-x} \sin x$
(5) $f(x) = \log_e x + \log_e(e - x)$
(6) $f(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2} + \frac{1}{1+(x+1)^2}$
(7) $f(x) = \sin^2(x)$
(8) $f(x) = \sin(x^2)$
(9) $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$
(10) $f(x) = \frac{1}{2-e^x}$
(11) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$
(12) $f(x) = x^3 - 3x + 1$
(13) $f(x) = e^{-(x-1)^2}$
(14) $f(x) = \frac{1}{\log_e(4-x^2)}$
(15) $f(x) = (x - \sqrt{3})^{10}$
(16) $f(x) = -3\tan(2x)$
(17) $f(x) = \frac{1}{(5-x)^3}$

6. Esonero giovedì 13 dicembre

Esercizio 16. Si calcoli il limite della successione definita da

$$\begin{cases} a_0 = 1; \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$$

Esercizio 17. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}.$$

Esercizio 18. Si calcoli il valore minimo (non il punto di minimo ma il valore minimo) della funzione $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$.

Esercizio 19. Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^2 - 1}.$$

7. Soluzioni del compito

Soluzione dell'esercizio 16.

Il termine generale della successione si scrive nella forma $a_n = 2^n$. Quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Soluzione dell'esercizio 17.

Moltiplicando e dividendo per $\sin x$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1$$

Infatti osserviamo che la frazione di destra è un limite notevole e tende a 1. Per calcolarci il limite della frazione di sinistra osserviamo che $\sin x$ tende a 0 e che $\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y}$ è pure un limite notevole e è uguale a 1.

Soluzione dell'esercizio 17.

Calcolando la derivata di f otteniamo:

$$f'(x) = 12\,x^2\,(x-1).$$

Osserviamo che x^2 è sempre maggiore o uguale a 0 e che è zero solo per $x = 0$. Il fattore $x-1$ invece è positivo per $x > 1$, zero per $x = 1$ e negativo altrimenti. Riassumendo otteniamo:

$$\begin{cases} f'(x) = 0 & \text{per } x = 0, 1; \\ f'(x) > 0 & \text{per } x > 1; \\ f'(x) < 0 & \text{per } x < 0 \text{ e } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Quindi f è non decrescente nell'intervallo $[1, \infty)$ e non crescente nell'intervallo $[1, -\infty)$. Quindi 1 è un punto di minimo assoluto e $f(1) = 1$ è il valore minimo della funzione.

Soluzione dell'esercizio 17.

La funzione è ben definita per $x^2 - 1 \neq 0$ ovvero per $x \neq \pm 1$. Ovvero il dominio della funzione è $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Osserviamo inoltre che e^y è positivo per ogni y quindi il segno di f è uguale al segno di $x^2 - 1$. Quindi

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{per } x > 1 \text{ o } x < -1; \\ f(x) < 0 & \text{per } -1 < x < 1. \end{cases}$$

Calcoliamo ora i limiti della funzione agli estremi dell'intervallo di definizione. Otteniamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2-1} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^{-y}}{y-1} = \frac{0}{\infty} = 0;$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2-1} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^{-y}}{y-1} = \frac{0}{\infty} = 0;$$
$$\lim_{x\to1^+} \frac{e^{-x^2}}{x^2-1} = \frac{e}{0^+} = +\infty;$$
$$\lim_{x\to1^-} \frac{e^{-x^2}}{x^2-1} = \frac{e}{0^-} = -\infty;$$
$$\lim_{x\to-1^+} \frac{e^{-x^2}}{x^2-1} = \frac{e^{-1}}{0^-} = -\infty;$$
$$\lim_{x\to-1^-} \frac{e^{-x^2}}{x^2-1} = \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty.$$

Studiamo infine quando la funzione è crescente e quando decrescente. Calcoliamo la derivata di f:

$$f'(x) = \frac{(-2xe^{-x^2})(x^2-1) - (e^{-x^2})(2x)}{(x^2-1)^2} = -2x^3 \frac{e^{-x^2}}{(x^2-1)^2}.$$

Il fattore $2\frac{e^{-x^2}}{(x^2-1)^2}$ è sempre positivo in D. Quindi nel dominio di definizione D il segno della derivata è uguale al segno di $-x^3$ che è positivo per $x < 0$ e negativo per $x > 0$. Infine la derivata ha un solo zero in 0.

Quindi la funzione è crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, 0)$ e decrescente in $(0, 1)$ e $(1, \infty)$. In particolare 0 è un punto di massimo locale. Non è globale infatti $f(0) = -1$ mentre la funzione abbiamo visto assume anche valori positivi.