Introduzione al gruppo fondamentale étale

Giulio Bresciani

16 ottobre 2017

In questo seminario vogliamo introdurre il gruppo fondamentale étale e le principali costruzioni ad esso legate. Un'ottima referenza è il capitolo 5 di [Sza09], che ho anche usato come traccia. Per comodità, tutti gli schemi saranno localmente noetheriani, a meno che non venga specificato diversamente: la teoria funziona anche più in generale, ma diventa un po' più complicata. Chiameremo Ω un generico campo algebricamente chiuso.

1 Rivestimenti étale finiti

Come si può intuire dal nome, per sviluppare la teoria del gruppo fondamentale étale sono necessari i rivestimenti étale finiti, cioé morfismi di schemi étale, finiti e surgettivi. Vediamo un po' di fatti al riguardo.

Proposizione 1.1 (5.3.1 di [Sza09])**.** *Sia $\varphi : X \to S$ un rivestimento étale finito e $s : S \to X$ una sezione di φ. Allora s induce un isomorfismo fra S e un sottoschema aperto e chiuso di X. In particolare, se S è connesso s induce dà un isomorfismo tra S e una componente connessa di X.*

Dimostrazione. Innanzitutto vediamo che il morfismo $s : S \to X$ è finito. Prendo un ricoprimento affine S_i di S, considero le controimmagini (ancora affini) $X_i = \varphi^{-1}(S_i)$ che danno un ricoprimento affine di X. A questo punto, $s^{-1}(X_i) = S_i$ è ancora affine, e quindi il morfismo s è affine. La condizione di finitezza sui fasci è immediata.

Ora s è iniettivo, perché è una sezione, e chiuso, perché è finito, e quindi è topologicamente un'immersione chiusa. Per verificare che sia un'immersione chiusa di schemi basta verificare la surgettività a livello di fasci strutturali, che è ovvia.

Per vedere che è un'immersione aperta, mostriamo prima che è un isomorfismo sulle spighe. Prendiamo quindi $q \in S$, e chiamiamo $p = s(q)$, $q = \varphi(p)$. Abbiamo due mappe a livello di spighe

$$\mathcal{O}_{S,q} \xrightarrow{\varphi^{\#}} \mathcal{O}_{X,p} \xrightarrow{s^{\#}} \mathcal{O}_{S,q}$$

la cui composizione è l'identità. A livello di campi residui l'isomorfismo è ovvio, le mappe $k(q) \to k(p) \to k(q)$ sono tutte iniettive. Inoltre, siccome $\varphi : X \to S$ è étale (in realtà ci basta non ramificata), $\mathcal{O}_{X,p}\varphi^{\#}(m_q) = m_p$. Questo, più Nakayama, ci dice che $\varphi^{\#}$ è bigettiva, e quindi anche $s^{\#}$ lo è.

Visto che s è un isomorfismo sulle spighe, in particolare è piatta. Mappe piatte di tipo finito su schemi localmente noetheriani sono aperte, quindi s è anche un'immersione aperta. $\square$

Corollario 1.2 (5.3.3 di [Sza09])**.** *Sia $\varphi : X \to S$ un rivestimento étale finito, Z uno schema connesso e $\psi_1, \psi_2 : Z \to X$ due morfismi tali che $\varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2$. Se $p : \operatorname{Spec} \Omega \to Z$ è un punto geometrico di Z tale che $\psi_1(p) = \psi_2(p)$, allora $\psi_1 = \psi_2$.*

Dimostrazione. Sostituendo X con $X \times_S Z$, possiamo supporre $Z = S$ e che ψ_1, ψ_2 siano due sezioni di φ. Abbiamo quindi un rivestimento étale su una base connessa, vogliamo mostrare che se due sezioni che coincidono in un punto geometrico allora coincidono ovunque. Ma questo è immediato usando la proposizione precedente. $\square$

Corollario 1.3 (5.3.4 di [Sza09])**.** *Se $X \to S$ è un rivestimento étale finito e connesso di grado n, gli elementi non banali di $\operatorname{Aut}(X/S)$ agiscono senza punti fissi sulle fibre geometriche di $X \to S$. In particolare, $\operatorname{Aut}(X/S)$ è finito e agisce transitivamente sulle fibre geometriche se e solo se $|\operatorname{Aut}(X/S)| = n$.*

Definizione 1.4. Un rivestimento étale finito e connesso $X \to S$ è di *Galois* se $\operatorname{Aut}(X/S)$ agisce transitivamente sulle fibre geometriche.

Osservazione 1.5. Grazie al Corollario 1.3, per controllare che un rivestimento sia di Galois basta guardare una sola fibra geometrica.

Corollario 1.6 (5.3.7 di [Sza09])**.** *Sia $X \to S$ un rivestimento étale finito e connesso, $G \subseteq \operatorname{Aut}(X/S)$ un sottogruppo. Abbiamo una fattorizzazione*

$$X \to X/G \to S$$

dove tutte le mappe sono rivestimenti étale finiti. Se $X \to S$ è di Galois e $G = \operatorname{Aut}(X/S)$, allora $X/G \to S$ è un isomorofismo.

Dimostrazione. Localmente, se $X = \operatorname{Spec} A$ e $S = \operatorname{Spec} R$, X/G si costruisce come $\operatorname{Spec} A^G$. Ovviamente $X \to X/G$ è finita e surgettiva perché A è finito su R e quindi su A^G. Più complicato è dimostrare che A^G è finito su R, ma si fa, e quindi anche $X \to X/G$ è finita e surgettiva. La mappa al quoziente $X \to X/G$ è étale se e solo se l'azione di G sulle fibre geometriche è libera, che nel nostro caso è vero grazie al corollario precedente.

Visto che $X \to S$ è non ramificato e $X \to X/G$ è un rivestimento étale, segue che anche $X/G \to S$ è non ramificato (guardando le fibre). Similmente, la piattezza di $X/G \to S$ viene dall fatto che $X \to S$ è piatto e $X \to X/G$ fedelmente piatto.

Se $X \to S$ è di Galois e $G = \operatorname{Aut}(X/S)$, allora $X/G \to S$ è un rivestimento étale finito con fibre geometriche di cardinalità 1, quindi un isomorfismo. $\square$

Proposizione 1.7 (5.3.8 di [Sza09])**.** *Supponiamo di avere un diagramma di rivestimenti finiti e connessi*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Z \arrow[d, "\psi"] \\ & S \end{tikzcd}$$

dove $\varphi : X \to S$ è di Galois con gruppo $G = \operatorname{Aut}(X/S)$. Allora anche $X \to Z$ è di Galois con gruppo $H = \operatorname{Aut}(X/Z) \subseteq \operatorname{Aut}(X/S)$, in particolare $Z = X/H$.

Dimostrazione. Fissiamo un punto geometrico $z : \operatorname{Spec} \Omega \to Z$, e consideriamo due punti p, q nella fibra geometrica X_z. Per definizione di rivestimento di Galois, abbiamo un elemento $\sigma \in \operatorname{Aut}(X/S)$ tale che $\sigma(p) = q$. Grazie al Corollario 1.2, i due morfismi $\pi, \pi \circ \sigma : X \to Z$ sono uguali. Questo vuol dire che $\sigma \in \operatorname{Aut}(X/Z) \subseteq \operatorname{Aut}(X/S)$, e quindi l'azione di $\operatorname{Aut}(X/Z)$ su X è transitiva sulle fibre geometriche di $X \to Z$. $\square$

Proposizione 1.8 (5.3.9 di [Sza09])**.** *Sia $\varphi : X \to S$ un rivestimento étale finito e connesso. Allora esiste un morfismo $\pi : P \to X$ tale che $\varphi \circ \pi : P \to S$ è un rivestimento étale finito di Galois, e inoltre ogni S-morfismo da un rivestimento di Galois in X fattorizza attraverso π. Il rivestimento $P \to S$ è detto chiusura di Galois di $X \to S$.*

Dimostrazione. Consideriamo un punto geometrico $s : \operatorname{Spec} \Omega \to S$, e siano $\{x_1, \ldots, x_n\}$ i punti della fibra geometrica X_s. Considerandoli una n-upla ordinata, ci danno un punto $x : \operatorname{Spec} \Omega \to X^n = X \times_S \cdots \times_S X$. Sia P la componente connessa di X^n contenente x. La composizione

$$\pi : P \to X^n \to X^{n-1} \to \ldots X$$

è finita ed étale perché ciascuna mappa lo è, ed è surgettiva perché X è connesso e π ha immagina aperta e chiusa. Quindi π e $\varphi \circ \pi$ sono rivestimenti étale finiti.

Vogliamo ora vedere che $\mathrm{Aut}(P/S)$ agisce transitivamente sulla fibra di s. Sia $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) : \mathrm{Spec}\,\Omega \to P \subseteq X^n$ un elemento della fibra, dove $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ è una funzione qualunque. Se mostriamo che σ è bigettiva, allora possiamo usare σ per permutare le coordinate di X^n ottenendo un automorfismo. Questo automorfismo manderebbe P in P, in quanto manda $(x_1, \ldots, x_n)$ in $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$, ed entrambi sono punti di P.

Supponiamo che σ sia iniettiva, ad esempio $\sigma(1) = \sigma(2)$. Consideriamo $X = \Delta \subseteq X \times_S X$ la diagonale: grazie a Proposizione 1.1, è un sottoschema aperto e chiuso. Quindi la proiezione sulle prime due coordinate $X^n \to X^2$ manda P sulla diagonale Δ: questo però è assurdo, perché il punto $(x_1, \ldots, x_n)$ non mappa su Δ in quanto $x_1 \neq x_2$. □

2 Il gruppo fondamentale étale

Ora abbiamo tutti gli ingredienti per definire il gruppo fondamentale étale. In realtà la definizione potevamo darla fin dall'inizio, la differenza è che ora possiamo capirci qualcosa.

Fissiamo quindi uno schema S e un punto geometrico $s : \mathrm{Spec}\,\Omega \to S$. Chiamiamo Fet_S la categoria dei rivestimenti étale finiti di S, dove i morfismi sono dati dai morfismi di rivestimento. Abbiamo un funtore, detto *funtore fibra*, $F_s : \mathrm{Fet}_S \to \mathrm{Set}$ che associa ad ogni rivestimento étale $X \to S$ la fibra X_s. Allora $\pi_1(S, s)$ è semplicemente il gruppo degli automorfismi di F_s, cioé le trasformazioni naturali $F_s \to F_s$. Più concretamente, per ogni rivestimento $X \to S$ diamo una permutazione della fibra X_s e chiediamo che questa commuti con i morfismi di rivestimento $X' \to X$. Quindi $\pi_1(S, s)$ agisce naturalmente su ogni fibra X_s.

Detta così, non è molto chiaro a cosa serva. Ad esempio, non è chiaro che $\pi_1(S, s)$ non sia banale, anche avendo rivestimenti non banali di S.

Teorema 2.1 (Grothendieck). *Sia S uno schema connesso, e $s : \mathrm{Spec}\,\Omega \to S$ un punto geometrico.*

1. *Il gruppo $\pi_1(S, s)$ è profinito, e la sua azione su X_s è continua per ogni rivestimento finito $X \to S$.*

2. *Il funtore F_s induce un'equivalenza fra Fet_S e la categoria degli insiemi finiti con un'azione continua di $\pi_1(S, s)$. Rivestimenti connessi corrispon-*

dono a insiemi con azione transitiva di $\pi_1(S, s)$, e rivestimenti di Galois corrispondono a quozienti finiti di $\pi_1(S, s)$.

Esempio 2.2. Consideriamo il caso $S = \operatorname{Spec} k$, con k un campo. Un rivestimento étale di $\operatorname{Spec} k$ è semplicemente un'unione disgiunta di schemi della forma $\operatorname{Spec} L$, con L/k estensione finita e separabile. Il funtore fibra manda un rivestimento connesso $\operatorname{Spec} L$ in $\operatorname{Spec} L \otimes_k \Omega$, che è un insieme finito indicizzato dalle immersioni $L \to \Omega$. Queste immersioni hanno immagine contenuta nella chiusura separabile $k_s \subseteq \Omega$, e quindi $F_s(\operatorname{Spec} L) = \operatorname{Hom}_k(L, k_s)$. A questo punto è immediato vedere che $\pi_1(S, s) \simeq \operatorname{Gal}(k_s/k)$.

Osservazione 2.3. Supponiamo che esista un rivestimento étale universale, cioé un rivestimento $U \to S$ con un punto fissato $u : \operatorname{Spec} \Omega \to U$ nella fibra di s tale che, per ogni rivestimento $X \to S$ e $x \in X_s$, esiste un unico morfismo di rivestimenti $U \to X$ che manda u in x. Questo nei fatti non accadrà quasi mai, ma è comunque utile capire l'idea. Se U esiste, allora abbiamo per definizione un'identificazione funtoriale

$$F_s(X) = X_s = \operatorname{Hom}_S(U, X),$$

cioé il funtore fibra è rappresentabile, è un funtore $\operatorname{Hom}_S(U, -)$ per un certo oggetto $U \in \operatorname{Fet}_S$. A questo punto grazie al lemma di Yoneda gli automorfismi di F_s sono semplicemente gli automorfismi di U, cioé $\pi_S(S, s) = \operatorname{Aut}_S(U)$.

In generale non possiamo sperare di avere un rivestimento étale finito universale, perché avremo rivestimenti di grado arbitrariamente alto e quindi un rivestimento universale dovrebbe avere grado infinito. Nessun problema, anche se non c'è, ce lo inventiamo.

Definizione 2.4. Sia $\mathcal{C}$ una categoria, e $F : \mathcal{C} \to \operatorname{Set}$ un funtore. Diciamo che F è *pro-rappresentabile* se esiste un sistema proiettivo (P_i, φ_{ij}) in $\mathcal{C}$ indicizzato da un certo insieme parzialmente ordinato I e un isomorfismo funtoriale

$$\varinjlim \operatorname{Hom}(P_i, X) \simeq F(X)$$

per ogni X in $\mathcal{C}$.

Proposizione 2.5 (5.4.6 di [Sza09])**.** *Sotto le ipotesi del teorema, il funtore fibra F_s è pro-rappresentabile.*

Dimostrazione. Prendiamo come insieme I l'insieme di tutti i rivestimenti di Galois $P_i \to S$, e diciamo che $i \leq j$ se abbiamo un morfismo di rivestimenti $P_j \to P_i$. Questo insieme parzialmente ordinato è diretto, cioè per ogni coppia di rivestimenti di Galois P_i, P_j c'è un terzo rivestimento di Galois P_k con morfismi $P_k \to P_i$, $P_k \to P_j$. Per mostrarlo, consideriamo una componente connessa $X \subseteq P_i \times_S P_j$, è un rivestimento di S, la chiusura di Galois $P_k \to S$ costruita in Proposizione 1.8 ha morfismi di rivesimento su P_i e P_j.

Ora che abbiamo gli oggetti del sistema inverso, dobbiamo scegliere un morfismo φ_{ij} per ogni $i \geq j$: tale morfismo esiste per come abbiamo definito l'ordine parziale, ma non è unico. Per ogni l, scegliamo un punto p_l nella fibra geometrica $F_s(P_i)$. Prendiamo un qualunque morfismo di rivestimenti $\varphi : P_i \to P_j$, visto che $P_j \to S$ è di Galois componendolo con un automorfismo di P_j troviamo un unico morfismo di rivestimenti φ_{ij} tale che $\varphi_{ij}(p_i) = p_j$, l'unicità viene da Corollario 1.2. Grazie all'unicità, è immediato verificare che se $k \leq i \leq j$ allora $\varphi_{ij} \circ \varphi_{ki} = \varphi_{kj}$.

Per ogni rivestimento $X \to S$, vogliamo ora dare un isomorfismo

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_S(P_i, X) \simeq F_s(X)$$

funtoriale in X. Un elemento del limite diretto $\varinjlim \mathrm{Hom}_S(P_i, X)$ è semplicemente un elemento $\psi \in \mathrm{Hom}_S(P_{i_0}, X)$ per qualche i_0, questo ci dà un elemento $\psi(p_{i_0})$ in $F_s(X)$. Visto che $\varphi_{ij}(p_i) = p_j$, è immediato verificare che l'elemento di $F_s(X)$ non dipende dalla scelta di i_0.

L'iniettività della mappa $\varinjlim \mathrm{Hom}_S(P_i, X) \to F_s(X)$ è data dall'unicità delle mappe di rivestimenti puntati (vedi Corollario 1.2), mentra la surgettività è l'esistenza della chiusura di Galois (vedi Proposizione 1.8). La funtorialità in X è ovvia. $\square$

Una volta che sappiamo che il funtore fibra è prorappresentato da (P_i, φ_{ij}), sostanzialmente per il lemma di Yoneda abbiamo che gli automorfismi del funtore fibra corrispondono agli automorfismi di (P_i, φ_{ij}), che sono $\varprojlim \mathrm{Aut}(P_i/S)$. Gli automorfismi di P_i però si compongono a destra, e quindi otteniamo

$$\pi_1(S, s) \simeq \varprojlim \mathrm{Aut}(P_i/S)^{\mathrm{op}}.$$

Abbiamo così ottenuto una presentazione di $\pi_1(S, s)$ come gruppo profinito, ma come agisce sulle fibre di un rivestimento $X \to S$? Se $g \in \pi_1(S, s)$ e $x \in X_s$, per Proposizione 2.5 esiste un rivestimento di Galois $P_i \to S$ con un morfismo di rivestimenti $\psi : P_i \to X$ che manda p_i in x. L'elemento g proietta su un automorfismo g' di P_i, l'azione di g su x sarà data allora da

$$g \cdot x = \psi \circ g'(p_i) \in X_s$$

Quindi l'azione di $\pi_1(S,s)$ su X_s spezza attraverso un quoziente finito, ed è di conseguenza continua. Inoltre è evidente che, perché l'azione sia transitiva, è necessario e sufficiente che X sia connesso: intanto $\pi_1(S,s)$ mappa surgettivamente sui gruppi di automorfismi di rivestimenti di Galois (perché tutte le mappe di transizione nel sistema proiettivo sono surgettive), quindi agisce transitivamente sulla fibra di dei rivestimenti di Galois, si conclude poi notando che $P_i \to X$ surietta su una componente connessa. Se X è connesso, è evidente che lo stabilizzatore di x è normale in $\pi_1(S,s)$ se e solo se $X \to S$ è di Galois.

Prendiamo ora un insieme finito A con un'azione continua di $\pi_1(S,s)$, vogliamo trovare un rivestimento $X \to S$ tale che $X_s \simeq A$ come $\pi_1(S,s)$-insiemi. Grazie a quanto osservato prima sui rivestimenti connessi, basta fare il caso in cui l'azione su A è transitiva. Poiché l'azione è continua, esiste un rivestimento di Galois P_i tale che l'azione su A spezza attraverso P_i. Fissiamo un elemento $a \in A$, e consideriamo lo stabilizzatore $H \subseteq \mathrm{Aut}(P_i/S)$ di a. Chiamiamo X il quoziente P_i/H, sappiamo che è un rivestimento di S. Visto che l'azione su A è transitiva, abbiamo isomorfismi di $\pi_1(S,s)$ insiemi

$$X_s \simeq \mathrm{Aut}(P_i/S)/H \simeq A$$

da cui concludiamo la dimostrazione di Teorema 2.1.

Teorema 2.6. *Il gruppo fondamentale étale definisce un funtore dalla categoria degli schemi puntati alla categoria dei gruppi profiniti.*

Dimostrazione. Dato un morfismo di schemi puntati $(X,x) \to (Y,y)$, dobbiamo dare un morfismo $\pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$. Grazie al Teorema 2.1, per fare questo è sufficiente far agire $\pi_1(X,x)$ sulla fibra dei rivestimenti étale di Y. Ma questo è immediato: dato un rivestimento étale $Y' \to Y$, chiamiamo $X' \to X$ il pullback a X, abbiamo un'identificazione naturale tra le fibre geometriche $X'_x \simeq Y'_y$ e quindi $\pi_1(X,x)$ agisce su Y'_y.

Il fatto che $\pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$ sia funtoriale in X e Y è una semplice verifica. □

3 Alcune proprietà

Mostriamo ora un po' di risultati di base sul gruppo fondamentale. Innanzitutto, vediamo che cambiando punto base abbiamo un isomorfismo.

Proposizione 3.1. *Sia S uno schema connesso, e $s : \mathrm{Spec}\,\Omega \to S$, $t : \mathrm{Spec}\,\Omega' \to S$ due punti geometrici. Allora esiste un isomorfismo non canonico $\pi_1(S,s) \simeq \pi_1(S,t)$.*

Dimostrazione. Per mostrare l'isomorfismo, è sufficiente mostrare che sono isomorfi i funtori fibra, cioè $F_s \simeq F_t$. Grazie a Proposizione 2.5, sappiamo che il funtore fibra F_s è prorappresentato dal sistema (P_i, φ_{ij}) dei rivestimenti di Galois. Analogamente F_t sarà prorappresentato da (P_i, ψ_{ij}): i rivestimenti di Galois sono gli stessi, ma φ_{ij} può essere diversa da ψ_{ij}. Ricordiamo che abbiamo una scelta di due punto p_i, q_i rispettivamente nella fibra di s e t, che che φ_{ij}, ψ_{ij} sono caratterizzati da $\varphi_{ij}(p_i) = p_j$, $\psi_{ij}(q_i) = q_j$.

L'isomorfismo che cerchiamo è non canonico, bisogna fare una scelta: la facciamo ora. Per ogni i, scegliamo un punto p'_i nella fibra di s in modo tale che siano compatibili con i morfismi ψ_{ij}, cioè $\psi_{ij}(p'_i) = p'_j$: questo può essere fatto scegliendo i p'_i uno alla volta su rivestimenti sempre più grandi. Ora definiamo $\alpha_i : P_i \to P_i$ come l'unico automorfismo di rivestimenti tale che $\alpha_i(p_i) = p'_i$. Affermo che $(\alpha_i)_i$ dà un isomorfismo $\alpha : (P_i, \varphi_{ij}) \to (P_i, \psi_{ij})$. Questo vuol dire semplicemente che, per ogni $i \geq j$, il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} P_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "\varphi_{ij}"] & P_i \arrow[d, "\psi_{ij}"] \\ P_j \arrow[r, "\alpha_j"] & P_j \end{tikzcd}$$

Siccome tutti i morfismi in gioco sono morfismi di rivestimenti étale connessi, grazie a Corollario 1.2 basta verificare che le composizioni coincidono su un punto geometrico. In particolare,

$$\psi_{ij} \circ \alpha_i(p_i) = \psi_{ij}(p'_i) = p'_j$$

$$\alpha_j \circ \varphi_{ij}(p_i) = \alpha_j(p_j) = p'_j.$$

□

Osservazione 3.2. Nella proposizione precedente abbiamo costruito un isomorfismo non canonico tra i funtori fibra $F_s \simeq F_t$. Tale isomorfismo viene chiamato *cammino* da s a t: in topologia classica, un cammino tra due punti può essere sollevato ai rivestimenti, dando appunto un isomorfismo fra i funtori fibra.

Scegliamo ora due cammini (cioè due isomorfismi) diversi $\mu, \nu : F_s \to F_t$. La composizione

$$\lambda = \mu^{-1} \circ \nu$$

è un automorfismo di F_s, cioé un elemento di $\pi_1(S, s)$. L'isomorfismo $\varphi_\mu : \pi_1(S, s) \to \pi_1(S, t)$ definito da μ è

$$g \mapsto \mu \circ g \circ \mu^{-1},$$

e analogamente per ν. Da un calcolo diretto otteniamo quindi

$$\varphi_\nu(g) = \varphi_\mu(\lambda g \lambda^{-1}),$$

cioè che i due isomorfismi differiscono per un automorfismo interno di $\pi_1(S,s)$.

Vogliamo ora studiare come si comporta il gruppo fondamentale rispetto ai morfismi che tengono fisso il punto base.

Proposizione 3.3. *Siano $(S,s),(S',s')$ due schemi connessi puntati, e $\varphi : S' \to S$ un morfismo tale che $\varphi(s') = s$. Chiamiamo $\varphi_* : \pi_1(S',s') \to \pi_1(S,s)$ l'omomorfismo indotto.*

1. *φ_* è banale se e solo se, per ogni rivestimento $X \to S$, $X \times_S S' \to S'$ è un rivestimento banale, cioè unione disgiunta di copie di S'.*

2. *φ_* è surgettivo se e solo se, per ogni rivestimento connesso $X \to S$, $X \times_S S'$ è ancora connesso.*

3. *φ_* è iniettivo se e solo se, per ogni rivestimento connesso $X' \to S'$, esiste un rivestimento $X \to S$ e un morfismo $X_i \to X'$ di rivestimenti di S', dove X_i è una componente connessa di $X \times_S S'$ (cioè i rivestimenti di S' provenienti da S sono cofinali in $\mathrm{Fet}_{S'}$).*

Dimostrazione. Ricordiamo brevemente come è definito φ_*: facciamo agire $\pi_1(S',s')$ sul funtore fibra di (S,s) prendendo il pullback dei rivestimenti di S. Usiamo la caratterizzazione di Teorema 2.1 che ci dice che il funtore fibra ci dà un'equivalenza di categorie tra la categoria dei rivestimenti di S e gli insiemi finiti con azione continua del gruppo fondamentale.

1. Dire che i rivestimenti di S diventano banali dopo il pullback a S' è equivalente a dire che per ogni insieme finito A con azione continua di $\pi_1(S,s)$, l'azione di $\pi_1(S',s')$ tramite φ_* è banale, e questo è equivalente a dire che φ_* è banale.

2. Dire il pullback di rivestimenti connessi è connesso è equivalente a dire che, se l'azione di $\pi_1(S,s)$ su un insieme finito A è continua e transitiva, l'azione di $\pi_1(S',s')$ tramite φ_* è ancora transitiva, e questo è equivalente a dire che φ_* è suriettivo.

3. La condizione è equivalente a chiedere che per ogni insieme finito A' con azione continua di $\pi_1(S',s')$ esiste un insieme finito A con azione continua di $\pi_1(S,s)$ e una mappa equivariante $A_i \to A'$, dove A_i è un sottoinsieme di A su cui $\pi_1(S',s')$ agisce transitivamente.

Se $g' \in \pi_1(S', s')$ è diverso da 0, esiste un insieme A' con azione transitiva di $\pi_1(S', s')$ tale che l'azione di g' è non banale. Per ipotesi abbiamo un insieme finito A con azione di $\pi_1(S, s)$ e mappa equivariante $A_i \to A'$. Visto che l'azione su A' è transitiva, la mappa $A_i \to A'$ è surgettiva, e quindi g' agisce non banalmente anche su A_i. Di conseguenza, g' ha immagine non banale in $\pi_1(S, s)$.

Il viceversa è più complesso e non lo dimostriamo, si può trovare in [Sza09, Corollary 5.5.8].

□

Corollario 3.4. *Siano $(S'', s'') \to (S', s') \to (S, s)$ morfismi di schemi connessi e puntati. La sequenza*

$$\pi_1(S'', s'') \to \pi_1(S', s') \to \pi_1(S, s)$$

è esatta se e solo se:

1. *per ogni rivestimento $X \to S$, il pullback $X \times_S S''$ è banale,*
2. *dato un rivestimento connesso $X' \to S'$ tale che $X' \times_{S'} S''$ ha una sezione su S'', esiste un rivestimento connesso $X \to S$ e un morfismo da una componente connessa di $X \times_S S'$ a X'.*

Dimostrazione. La prima condizione è equivalente a dire che la composizione dei due morfismi è 0. Per la seconda condizione rimandiamo a [Sza09, Corollary 5.5.9]. □

Abbiamo ora tutti gli strumenti per costruire la sequenza esatta di omotopia. Prendiamo uno schema X noetheriano su un campo k. Intuitivamente, possiamo pensare al morfismo $X \to \operatorname{Spec} k$ come a una fibrazione a fibra $X_{k_s} := X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k_s$, dove k_s è una chiusura separabile di k. In topologia algebrica, quando ho una fibrazione questa mi dà una successione esatta lunga dei gruppi di omotopia. Qua succede una cosa analoga, esiste una sequenza esatta

$$1 \to \pi_1(X_{k_s}, \overline{x}) \to \pi_1(X, \overline{x}) \to \operatorname{Gal}(k_s/k) \to 1.$$

Il fatto che ci troviamo con una sequenza esatta corta e non lunga come in topologia è, sempre intuitivamente, conseguenza del fatto che X_{k_s} è connesso e quindi $\pi_0(X_{k_s}, \overline{x})$ è banale, mentre $\operatorname{Spec} k$ non ha omotopia in grado maggiore di uno perché il suo rivestimento universale $\operatorname{Spec} k_s$ è "veramente un punto" dal punto di vista dell'omotopia étale (al contrario di $\operatorname{Spec} k$), e quindi contraibile. Ma bando alle ciance, e dimostriamo qualcosa.

Abbiamo innanzitutto bisogno di un lemma preliminare.

Lemma 3.5. *Sia X uno schema di tipo finito su k, K/k un'estensione di campi qualunque, $Y \to X_K$ un morfismo di tipo finito. Allora esiste una sottoestensione $K/L/k$ finitamente generata su k e Z uno schema di tipo finito su L con un morfismo $Z \to X_L$ tale che $Z_K \simeq Y$ e tale che $Y \to X_K$ è il pullback di $Z \to X_L$.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[d] \\ X_K \arrow[r] & X_L \end{tikzcd}$$

Inoltre, se $L' \subseteq K$ è un'altra sottoestensione finitamente generata e $Z' \to X_{L'}$ è un altro morfismo che rispetta le condizioni di sopra, allora esiste un estensione finitamente generata $L'' \subseteq K$ contenente sia L che L' con un isomorfismo $Z_{L''} \simeq Z'_{L''}$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} Z_{L''} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & Z'_{L''} \arrow[d] \\ X_{L''} \arrow[r, equal] & X_{L''} \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Posso scrivere X come unione finita di aperti affini $X = \bigcup_i U_i = \bigcup_i \operatorname{Spec} A_i$ dove

$$A_i = k[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r)$$

è una k-algebra finitamente generata per ogni i. Considero $U_{i,K} = \operatorname{Spec} A_i \otimes_k K = \operatorname{Spec} K[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r)$ e le controimmagini $V_i \subseteq Y$. Nuovamente, posso ricoprire V_i con un numero finito di aperti affini $V_{i,j} = \operatorname{Spec} B_{i,j}$ dove $B_{i,j}$ è un'algebra finitamente generata su $A_i \otimes_k K$. Quindi $B_{i,j}$ è della forma

$$B_{i,j} = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]/(f_1, \ldots, f_r, g_1 \ldots, g_s)$$

dove i polinomi f sono nelle variabili x e coefficienti in k, mentre i polinomi g sono nelle variabili x e y e coefficienti in K.

Prendo $L \subseteq K$ l'estensione di k generata da tutti i coefficienti dei g_l al variare di i e j. Essendo un numero finito di polinomi, sono in numero finito. Questo ci dà degli anelli $B_{i,j,L}$ che sono estensioni finitamente generate di $A_i \otimes_k L$. Per costruire il nostro schema $Y' \to X_L$, ci mancano ancora le condizioni di incollamento per gli schemi $\operatorname{Spec} B_{i,j,L}$, ma anche queste si sistemano con un numero finito di coefficienti, e quindi a meno di allargare ulteriormente L si conclude.

La parte sull'unicità si dimostra in modo analogo. $\square$

Osservazione 3.6. Nel lemma precedente, se K/k è un'estensione algebrica, la sottoestensione $L \subseteq K$ trovata è automaticamente finita su k.

Proposizione 3.7. *Sia X uno schema noetheriano geometricamente connesso su k. Fissiamo una chiusura algebrica $\overline{k}/k$, e consideriamo la chiusura separabile $k_s \subseteq \overline{k}$. Sia $X_{k_s} = X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k_s$ e fissiamo un punto geometrico $\overline{x}$ di X_{k_s} a valori in $\overline{k}$. La sequenza di gruppi profiniti*

$$1 \to \pi_1(X_{k_s}, \overline{x}) \to \pi_1(X, \overline{x}) \to \operatorname{Gal}(k_s/k) \to 1$$

è esatta.

Dimostrazione. La dimostrazione è essenzialmente un'applicazione dei criteri dati in Proposizione 3.3 e Corollario 3.4. Procediamo con ordine.

- $\pi_1(X_{k_s}, \overline{x}) \to \pi_1(X, \overline{x})$ è iniettiva. Dobbiamo mostrare che per ogni rivestimento étale connesso $\overline{Y} \to X_{k_s}$, esiste un rivestimento $Y \to X$ e un morfismo di rivestimenti $Y' \to \overline{Y}$, dove Y' è una componente connessa di $Y \times_X X_{k_s} = Y_{k_s}$, cioè che possiamo "dominare" ogni rivestimento di X_{k_s} con una componente di un rivestimento proveniente da X.

  Per far questo, basta notare che, grazie al Lemma 3.5, esiste un'estensione finita e separabile L/k e un morfismo $Y \to X_L$ tale che, cambiando base a k_s, diventa $\overline{Y} \to X_{k_s}$. Il fatto che $\overline{Y} \to X_{k_s}$ sia un rivestimento étale finito implica per verifica diretta che anche $Y \to X_L$ è un rivestimento étale finito, e quindi anche la composizione $Y \to X$. Ora, se consideriamo $Y \times_X X_{k_s}$, questo è isomorfo a $Y \times_{\operatorname{Spec} k} (\operatorname{Spec} L \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k_s)$, e cioé d copie di $\overline{Y}$ dove d è il grado di L/k, da cui si conclude.

- Vediamo ora l'esattezza al centro, usando il Corollario 3.4. La prima condizione da verificare è che un rivestimento di $\operatorname{Spec} k$, portato a $\overline{X}$, diventi banale. Questo però è ovvio, in quanto i rivestimenti connessi di $\operatorname{Spec} k$ sono semplicemente estensioni finite e separabili L/k, e queste diventano banali già su $\operatorname{Spec} k_s$ e a maggior ragione su $\overline{X}$.

  La seconda condizione da verificare, più sottile, è che se $Y \to X$ è un rivestimento connesso il cui pullback $Y_{k_s} \to X_{k_s}$ ha una sezione $X_{k_s} \to Y_{k_s}$, allora esiste un'estensione finita e separabile L/k ed un morfismo di rivestimenti $X_L \to Y$. Ma dare un morfismo di rivestimenti $X_L \to Y$ è come dare una sezione di $Y_L \to X_L$, e noi abbiamo una sezione di $Y_{k_s} \to X_{k_s}$, e quindi si conclude applicando nuovamente il Lemma 3.5.

- Mostriamo infine la suriettività di $\pi_1(X, \overline{x}) \to \mathrm{Gal}(k_s/k)$. Notiamo che non abbiamo ancora usato l'ipotesi X geometricamente connesso, come in effetti ci aspettiamo dall'interpretazione topologica. Grazie a Proposizione 3.3, questo è equivalente a chiedere che i rivestimenti connessi di $\operatorname{Spec} k$, tirati indietro a X, siano ancora connessi, e questo è precisamente il fatto che X sia geometricamente connesso.

□

Osservazione 3.8. Nel libro di Szamuely, viene usata l'ipotesi ulteriore che X sia geometricamente integro, che usa nel mostrare l'esattezza al centro. Questo gli permette sostanzialmente di ricondurre la dimostrazione a fatti di teoria dei campi, ma mi pare che anche la nostra dimostrazione funzioni.

Dimostrata la Proposizione 3.7, val la pena spendere qualche minuto per enunciare uno dei problemi aperti più grossi riguardanti il gruppo fondamentale (e anche perché i metodi di Kim servirebbero proprio anche per questo problema aperto).

Sia $y \in X(k)$ un punto razionale, e $\overline{y}$ il punto geometrico associato. Per funtorialità del gruppo fondamentale, abbiamo una mappa $\mathrm{Gal}(k_s/k) \to \pi_1(X, \overline{y})$. Ci piacerebbe dire che questo morfismo dà una sezione della sequenza esatta corta appena vista, ma questo non è così immediato, perché abbiamo due punti base diversi, $\overline{x}$ e $\overline{y}$. Scegliamo quindi un cammino da $\overline{y}$ in $\overline{x}$, cioè un isomorfismo dei funtori fibra, questo ci dà un isomorfismo non canonico $\pi_1(X, \overline{y}) \simeq \pi_1(X, \overline{x})$. La composizione

$$\mathrm{Gal}(k_s/k) \to \pi_1(X, \overline{y}) \simeq \pi_1(X, \overline{x})$$

è una sezione, perché il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, \overline{y}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi_1(X, \overline{x}) \arrow[dl] \\ & \mathrm{Gal}(k_s/k) & \end{tikzcd}$$

Se cambiamo il cammino da $\overline{y}$ a $\overline{x}$, la sezione cambia per un automorfismo interno di $\pi_1(X, \overline{x})$. In realtà, il fatto che y sia un punto razione ci dice che l'automorfismo è definito da un elemento di $\pi_1(X_{k_s}, \overline{x})$.

Abbiamo quindi una funzione

$$X(k) \to \{\text{sezioni di } \pi_1(X, \overline{x}) \to \mathrm{Gal}(k_s/k)\} / \sim$$

dove consideriamo due sezioni equivalenti se differiscono per un automorfismo interno.

Congettura 3.9. (Congettura della sezione di Grothendieck) Sia X una curva proiettiva liscia e geometricamente connessa di genere almeno 2 su campo k finitamente generato su $\mathbb{Q}$. Allora la mappa

$$X(k) \to \{\text{sezioni di } \pi_1(X, \bar{x}) \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)\}/\sim$$

è bigettiva.

Se la congettura è vera, abbiamo un modo di ricostruire i punti di una curva di genere almeno 2 guardando solo il gruppo fondamentale. Si sa che la mappa definita sopra è iniettiva per genere maggiore o uguale a 1, e che non può essere surgettiva in genere 1 appena la curva ellittica ha punti razionali non di torsione. L'idea di Grothendieck è che, da genere 2, la struttura fortemente anabeliana (i.e. molto poco abeliana) del gruppo fondamentale impone restrizioni troppo forti all'esistenza di sezioni.

Andiamo avanti con le proprietà del gruppo fondamentale. D'ora in poi a volte tralscerò di scrivere il punto base, tornando a specificarlo quando fosse rilevante.

Proposizione 3.10. *Sia k un campo algebricamente chiuso, e X, Y schemi connessi e noetheriani su k, con inoltre X proprio. Il morfismo naturale*

$$\pi_1(X \times Y) \to \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Diamo solo un'idea della dimostrazione, senza scendere nei dettagli. L'omomorfismo $\pi_1(X \times Y) \to \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ può essere inserito in un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_1(X) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(X \times Y) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(Y) \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_1(X) \arrow[r] & \pi_1(X) \times \pi_1(Y) \arrow[r] & \pi_1(Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dove la mappa $\pi_1(X) \to \pi_1(X \times Y)$ è data dal punto base di Y che induce una sezione $X \to X \times Y$. La riga inferiore è ovviamente esatta, si dimostra che lo è anche quella superiore in maniera simile a quanto fatto in Proposizione 3.7. Si applica quindi il lemma dei 5 per ottenere che la mappa verticale al centro è un isomorfismo. □

Osservazione 3.11. Nella proposizione precedente, è abbastanza fastidioso che sia necessaria l'ipotesi X proprio, visto che in topologia non è così. La dimostrazione dell'esattezza della riga in alto, però, si basa pesantemente su quest'ipotesi, non vedo modo di farne a meno.

Proposizione 3.12. *Sia $k \subseteq K$ un'estensione di campi algebricamente chiusi, e X uno schema proprio e connesso su k. La mappa naturale $\pi_1(X_K) \to \pi_1(X)$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. La suriettività è semplice: basta mostrare che il pullback di rivestimenti connessi è connesso. Ma è un fatto generale che, una volta che uno schema è connesso su un campo algebricamente chiuso, il suo pullback su qualunque campo è ancora connesso.

Per l'iniettività, dobbiamo mostrare che i rivestimenti di X_K provenienti da X sono cofinali. L'idea è semplice: vorremmo applicare Proposizione 3.10 per ottenere $\pi_1(X_K) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(\operatorname{Spec} K) \simeq \pi_1(X)$. Questo però non è fattibile, perché K non è noetheriano su k. L'idea è allora ricondursi a una sottoestensione finitamente generata di K, fare uno spreading out, applicare Proposizione 3.10 e tornare a restringersi ai campi di funzioni.

Prendiamo quindi un rivestimento connesso $Y \to X_K$. Grazie al Lemma 3.5, troviamo una sottoestensione finitamente generata $k' \subseteq K$ e un rivestimento étale $Y' \to X_{k'}$ tale che $Y \simeq Y' \times_{\operatorname{Spec} k'} \operatorname{Spec} K$. Possiamo trovare uno spreading out $\mathcal{Y} \to X \times_k T$ dove T è uno schema di tipo finito su k, integro, con campo delle funzioni $k(T) = k'$ e tale che $Y' \to X_{k'}$ è la fibra generica di $\mathcal{Y} \to X \times_k T$. A patto di rimpicciolire T, possiamo supporre che $\mathcal{Y} \to X \times_k T$ sia ancora un rivestimento étale. Visto che X è proprio, possiamo applicare Proposizione 3.10 e abbiamo $\pi_1(X \times T) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(T)$. Questo ci dice che possiamo dominare il rivestimento $\mathcal{Y} \to X \times_k T$ con una coppia di rivestimenti $Z \to X$, $T' \to T$,

$$Z \times T' \to \mathcal{Y} \to X \times T.$$

Restringiamoci quindi al punto generico di T, abbiamo

$$Z \times \operatorname{Spec} k(T') \to Y' \to X_{k'}.$$

Estendiamo ora il campo base da k' a K, e otteniamo

$$Z \times \operatorname{Spec}(k(T') \otimes_{k'} K) \to Y \to X_K$$

dove $k(T') \otimes_{k'} K$ è un prodotto di copie di K, in quanto $k(T')$ è finito su $k' = k(T)$ e K è algebricamente chiuso. Scegliendo una di queste copie, otteniamo un morfismo $Z_K \to Y$, come desiderato. $\square$

Dato uno schema di tipo finito su $\mathbb{C}$, è possibile definire lo spazio analitico associato X^{an}.

Teorema 3.13. *Sia X uno schema connesso di tipo finito su $\mathbb{C}$. Il funtore $(Y \to X) \mapsto (Y^{an} \to X^{an})$ che associa a un rivestimento $Y \to X$ il rivestimento di spazi analitici associato induce un'equivalenza fra la categoria dei rivestimenti étale finiti di X e la categoria dei rivestimenti finiti di X^{an}. Di conseguenza, abbiamo un isomorfismo indotto*

$$\widehat{\pi_1^{top}(X^{an})} \simeq \pi_1(X)$$

dove il termine a sinistra è il completamento profinito del gruppo fondamentale topologico di X^{an}.

Dimostrazione. Essenzialmente, è il teorema di esistenza di Riemann. Vedi [SGA1, Exposé XII, Corollaire 5.2]. □

Grazie al Teorema 3.13, alla Proposizione 3.12 e alla Proposizione 3.7, nel caso di campi di caratteristica 0 è sempre possibile esprimere il gruppo fondamentale étale in maniera abbastanza esplicita: otterremo sempre un'estensione del completamento profinito di un gruppo fondamentale topologico con il gruppo di Galois assoluto del campo base.

Concludiamo quest'introduzione con il calcolo del gruppo fondamentale nel caso di varietà abeliane. Potremmo anche limitarci alla strategia appena mostrata, ma almeno in questo caso relativamente semplice è utile sporcarsi un po' le mani (oltre al fatto che funziona anche in caratteristica positiva).

Proposizione 3.14. *Sia A una varietà abeliana su un campo algebricamente chiuso k. Dato un rivestimento connesso $\varphi : Y \to A$, possiamo dare allo schema Y una struttura di varietà abeliana tale che φ sia un omomorfismo.*

Dimostrazione. È sufficiente fare il caso in cui $Y \to A$ sia un rivestimento di Galois. Supponiamo non lo sia, e prendiamo la chiusura di Galois $Y' \to Y \to A$. Supponendo di aver dimostrato la proposizione nel caso di un rivestimento di Galois, Y' è una varietà abeliana e $Y' \to A$ è un isomorfismo. Ora, il gruppo degli automorfismi $\mathrm{Aut}(Y'/A)$ è chiaramente isomorfo a $\ker(Y' \to A)$ che è abeliano, ma allora tutti i suoi sottogruppi sono normali, di conseguenza $Y \to A$ era già un rivestimento di Galois.

Supponiamo quindi che $Y \to A$ sia un rivestimento di Galois con gruppo di automorfismi $G = \mathrm{Aut}(Y/A)$. Consideriamo la mappa di moltiplicazione $m_A : A \times A \to A$, e prendiamo il pullback di Y lungo m_A:

$$\begin{tikzcd}
Y' = (A \times A) \times_A Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\varphi"] \\
A \times A \arrow[r, "m_a"] & A
\end{tikzcd}$$

Y' è connessa: infatti Y è connessa e tutte le fibre di $Y' \to Y$ sono connesse, perché sono isomorfe a copie di A.

Quindi $Y' \to A \times A$ è un rivestimento di Galois con gruppo di automorfismi $G = \mathrm{Aut}(Y/A)$. Grazie al fatto che $\pi_1(A \times A) \simeq \pi_1(A) \times \pi_1(A)$, abbiamo una coppia di rivestimenti di Galois $Z_1 \to A$, $Z_2 \to A$ con gruppi di automorfismi G_1, G_2 e un morfismo di rivestimenti $Z_1 \times Z_2 \to Y' \to A \times A$ corrispondente a un morfismo surgettivo $G_1 \times G_2 \to G$. Sia H il ker di tale morfismo, a meno di sostituire Z_i con $Z_i/(H \cap G_i)$, possiamo supporre che $G_i \to G$ sia iniettiva.

Quindi i G_i possono essere identificati con due sottogruppi di G che commutano fra di loro e che lo generano. Ma se restringiamo tutto a $A \times \{0\}$ otteniamo un diagramma del tipo

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[r] \arrow[d] & Z_1 \times Z_2 \arrow[d] & \\
Y \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
A \times \{0\} \arrow[r] & A \times A \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

e $Z_1 \to A$ ha gruppo di automorfismi G_1, quindi in realtà $G_1 = G$. Lo stesso vale per G_2, da cui otteniamo che G è commutativo. Inoltre abbiamo isomorfismi $Z_i \simeq Y$ e $Y' \simeq Z_1 \times Z_2 \simeq Y \times Y$, e quindi una mappa $m_Y : Y \times Y \to Y$ che è il base change di m_A. Fissiamo un punto $0_Y \in Y$ sopra $0_A \in A$. Modificando m_Y per un automorfismo di Y, possiamo supporre $m_Y(0_Y, 0_Y) = 0_Y$.

A questo punto è fatta: dobbiamo solo verificare che m_Y rispetta associatività, inverso, identità, commutatività. Vediamo ad esempio l'associatività, le altre sono analoghe.

Abbiamo due morfismi $Y \times Y \times Y \to Y$, il primo moltiplica prima le due coordinate, il secondo moltiplica prima le ultime due. La due composizioni $Y \times Y \times Y \to Y \to A$ sono uguali, perché m_A è associativa. Visto che $Y \to A$ è un rivestimento, basta quindi verificare che i due morfismi coincidono in un punto, ad esempio $(0_Y, 0_Y, 0_Y)$. $\square$

Corollario 3.15. *Sia n un intero multiplo del grado di φ. Allora c'è una mappa $\psi : A \to Y$ e un diagramma commutativo*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "n_A"'] & Y \arrow[d, "\varphi"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Consideriamo il morfismo di moltiplicazione $n_Y : Y \to Y$, per ipotesi $\ker \varphi \subseteq \ker n_Y = Y[n]$, quindi n_Y induce un morfismo $\psi : Y/\ker \varphi \simeq A \to Y/Y[n] \simeq Y$ che soddisfa $\psi \circ \varphi = n_Y$. Consideriamo la composizione $\varphi \circ \psi \circ \varphi : Y \to A$, abbiamo

$$\varphi \circ \psi \circ \varphi = \varphi \circ n_Y = n_A \circ \varphi$$

dove $\varphi \circ n_Y = n_A \circ \varphi$ perché φ è un omomorfismo. Ma allora $\varphi \circ \psi = n_A$, perché φ è un rivestimento étale e i due morfismi coincidono in 0_A. □

Abbiamo quindi (quasi) dimostrato il seguente teorema.

Teorema 3.16. *Sia A una varietà abeliana su un campo algebricamente chiuso. Il gruppo fondamentale di A è commutativo, e c'è un isomorfismo naturale*

$$\pi_1(A) \simeq T(A) = \prod_l T_l(A)$$

Dimostrazione. Se n è coprimo con la caratteristica di k, il morfismo $n_A : A \to A$ è un rivestimento di Galois con gruppo $\ker(n_A) \simeq A[n]$. Infatti $\ker n_A$ è uno schema in gruppi finito di ordine coprimo con chark, ed è quindi étale. Su un campo algebricamente chiuso un gruppo étale finito è semplicemente un gruppo finito, e la mappa naturale $\ker(n_A) \to A[n]$ è bigettiva.

Se la caratteristica di k divide n, $\ker n_A$ è uno schema in gruppi non ridotto con una mappa naturale $\ker \varphi \to A[n]$ che è ancora bigettiva, ma non è un isomorfismo di schemi in gruppi: è surgettivo con kernel dato da un gruppo non ridotto concentrato in un punto. Chiamiamo $\nu_n \subseteq \ker n_A$ questo sottogruppo connesso. È uno schema in gruppi finito che agisce su A, possiamo farne il quoziente A/ν_n: la costruzione è esattamente la stessa dei quozienti per gruppi finiti. Siccome ν_n è un sottogruppo di A, A/ν_n eredita la struttura di varietà abeliana, inoltre la moltiplicazione $n : A \to A$ induce un omomorfismo di varietà abeliane $A/\nu_n \to A$ con kernel $\ker n_A/\nu \simeq A[n]$, ed è quindi étale. Affermo che i rivestimenti della forma $A/\nu_n \to A$ sono cofinali nei rivestimenti étale di A, il che implica $\pi_1(A) \simeq T(A)$ come voluto.

Prendiamo quindi un rivestimento qualunque $\varphi : Y \to A$. Grazie ai risultati precedenti, sappiamo che φ è un morfismo di varietà abeliane e abbiamo una fattorizzazione $A \to Y \to A$ della moltiplicazione per n, dove n è un qualunque intero multiplo del grado di φ. Consideriano $\nu_n \subseteq \ker n_A$: siccome φ è étale, $\nu_n \subseteq \ker \varphi$, e abbiamo quindi un momrfismo di rivestimenti $A/\nu_n \to Y$. □

Osservazione 3.17. Nel libro di Szamuely, temo che la parte specifica della caratteristica positiva sia sbagliata. Ad un certo punto ha una mappa fra varietà abeliane bigettiva sui punti e da questo conclude che è un isomorfismo, che però è falso perché la mappa in generale è ramificata.