

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RENÉE ELKIK

Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 6, n° 4 (1973), p. 553-603

[<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1973_4_6_4_553_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1973_4_6_4_553_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS D'ÉQUATIONS A COEFFICIENTS DANS UN ANNEAU HENSÉLIEN

PAR RENÉE ELKIK



Le début de cet article est consacré à la démonstration d'un théorème qui généralise un résultat dû à Tougeron [10] et établit l'existence de solutions d'équations polynomiales à coefficients dans un anneau hensélien à partir de l'existence de solutions approchées, sous certaines hypothèses de lissité du système d'équations.

La démonstration se fait en deux étapes. Dans une première partie, on considère uniquement des anneaux complets. On approxime ensuite des solutions formelles par des solutions henséliennes. On démontrera en particulier le résultat suivant (corollaire du théorème 2) :

Soient $(A, \mathcal{J})$ un couple hensélien noethérien, X un schéma affine de type fini sur A , supposé lisse sur $\text{Spec } A$ en dehors du fermé $V(\mathcal{J})$. Désignons par (E_n) le système projectif des sections approchées modulo $\mathcal{J}^n$ de X , par $\hat{E}$ sa limite et par E , l'ensemble des A -sections de X .

Alors le système projectif (E_n) vérifie une condition de Mittag-Leffler uniforme et E est dense dans $\hat{E}$.

On applique ensuite ces résultats à certains problèmes d'algébrisation. Dans la quatrième partie en particulier on montre que la déformation formelle verselle d'une singularité isolée est algébrisable, puis qu'il existe des déformations henséliennes verselles de singularité isolée.

Ce travail a été effectué sous la direction de M. Raynaud à qui j'exprime toute ma reconnaissance pour l'aide constante qu'il m'a apportée. Je remercie vivement M. Artin avec qui j'ai eu des entretiens fructueux ainsi que M. Schlessinger.

Je veux aussi adresser mes remerciements à L. Illusie qui m'a apporté des éclaircissements et a aplani rapidement certaines des difficultés que j'ai rencontrées.

0. Préliminaires

Tous les anneaux considérés dans la suite sont supposés noethériens.

0.1. On rappelle pour commencer quelques propriétés des couples henséliens, que l'on utilisera.

DÉFINITION. — Soient A un anneau, $\mathcal{J}$ un idéal de A , B une A -algèbre étale. On dit que B est un *voisinage étale* de $\mathcal{J}$ dans A [ou que $\text{Spec } B$ est un voisinage étale de $V(\mathcal{J})$] si le morphisme induit

$$A/\mathcal{J} \rightarrow B/\mathcal{J}B$$

est un isomorphisme.

DÉFINITION. — Soient A un anneau, $\mathcal{J}$ un idéal contenu dans le radical de A . On dit que le couple $(A, \mathcal{J})$ est *hensélien* si pour toute A -algèbre B voisinage étale de $\mathcal{J}$ dans A , il existe un A -morphisme $B \rightarrow A$.

A un couple $(A, \mathcal{J})$ on associe de manière universelle un couple hensélien.

Disons d'abord qu'étant donnés deux couples $(A, \mathcal{J})$, $(B, \mathcal{J})$ on dit qu'un morphisme de A dans B est un morphisme de couple, si l'image de $\mathcal{J}$ est contenue dans $\mathcal{J}$.

DÉFINITION. — Soit $(A, \mathcal{J})$ un couple. On appelle *hensélisé $\mathcal{J}$ -adique* de A un couple hensélien $(\tilde{A}, \tilde{\mathcal{J}})$ muni d'un morphisme de couple

$$i: (A, \mathcal{J}) \rightarrow (\tilde{A}, \tilde{\mathcal{J}}),$$

tel que, pour tout couple hensélien $(B, \mathcal{J})$ et tout morphisme de couples

$$v: (A, \mathcal{J}) \rightarrow (B, \mathcal{J}),$$

il existe un unique morphisme

$$\tilde{v}: (\tilde{A}, \tilde{\mathcal{J}}) \rightarrow (B, \mathcal{J}),$$

tel que $\tilde{v} \circ i = v$.

Toutes ces définitions figurent dans [7]. L'existence du hensélisé y est démontrée et sa construction donnée. Le hensélisé d'un couple $(A, \mathcal{J})$ s'obtient comme limite inductive des voisinages étales de $\mathcal{J}$ dans A . Si $\mathcal{J}$ est contenu dans le radical de A , $\tilde{A}$ est fidèlement plat sur A . Il est clair qu'un anneau séparé complet pour la topologie $\mathcal{J}$ -adique est hensélien pour cette topologie et qu'un anneau et son hensélisé ont même complété $\mathcal{J}$ -adique.

On utilisera à plusieurs reprises dans la dernière partie de cet article le théorème d'approximation de M. Artin [1].

0.2. QUELQUES NOTATIONS. — Considérons les données suivantes :

A un anneau noethérien;

B une A-algèbre de type finie munie d'une représentation

$$B = A[X_1, \dots, X_N]/J, \quad J = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A[X_1, \dots, X_N].$$

Pour tout entier p et tout multiindice

$$(x) = (x_1, \dots, x_p), \quad 1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_p \leq q,$$

on désignera par $F_{(x)}$ l'idéal de $A[X_1, \dots, X_N]$ engendré par les f_{x_i} , $i \in [1, p]$, par $\Delta_{(x)}$ l'idéal de $A[X_1, \dots, X_N]$ engendré par les mineurs d'ordre p de la matrice jacobienne

$$M_{(x)} = (\partial f_{x_i} / \partial X_j)_{i=1, \dots, p; j=1, \dots, N}.$$

Pour tout multiindice (x) , soit $K_{(x)}$ l'idéal de $A[X_1, \dots, X_N]$, conducteur de J dans $F_{(x)}$:

$$K_{(x)} = \{a \in A[X_1, \dots, X_N] \mid aJ \subset F_{(x)}\}.$$

L'image dans B de l'idéal $\sum_{(x), p} K_{(x)} \Delta_{(x)}$ a pour support *le lieu singulier de B sur A*.

Chaque fois qu'on considérera dans la suite de telles données, H_B désignera un idéal de $A[X_1, \dots, X_N]$ ayant la propriété d'être contenu dans $\sum_{(x), p} K_{(x)} \Delta_{(x)}$. On peut noter que cette propriété est stable par changement de base puisque $K_{(x)}$ ne peut qu'augmenter après extension de la base. On utilisera ceci à plusieurs reprises sans le préciser. D'autre part, un idéal H_B ainsi choisi est tel que $\text{Spec } B - V(H_B)$ est lisse sur $\text{Spec } A$.

I. Dans toute cette partie A désigne un anneau complet pour la topologie définie par un idéal $\mathcal{J}$, B une A algèbre de type fini admettant une présentation

$$B = A[X_1, \dots, X_N]/J, \quad J = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A[X_1, \dots, X_N].$$

On commence par traiter le cas où $\mathcal{J}$ est principal. L'introduction de l'idéal I dans le lemme suivant a une raison technique pour la suite.

LEMME 1. — *Supposons A complet pour la topologie définie par un idéal principal engendré par t.*

Soit I un idéal quelconque de A, et soient Λ l'idéal de A formé des éléments annulés par une puissance de t, k un entier tel que

$$\Lambda \cap (t)^k = (0) \quad (\text{Artin-Rees}).$$

Soit (h, n) un couple d'entiers tels que $n > \sup(2h, h+k)$ et soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N) \in A^N$ tel que

$$\begin{aligned} H_b(\mathbf{a}) &\supset t^h, \\ J(\mathbf{a}) &\subset t^n I. \end{aligned}$$

Alors il existe $\mathbf{a}^0 = (a_1^0, \dots, a_N^0) \in A^N$ congru à $\mathbf{a}$ modulo $t^{n-h} I$ et tel que $J(\mathbf{a}^0) = 0$.

Démonstration. — On procède par approximations successives en montrant qu'on peut trouver $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \in A^N$ vérifiant

$$(1) \quad \begin{cases} y_i \equiv 0 \pmod{t^{n-h} I}, & \forall i \in [1, N], \\ J(\mathbf{a} - \mathbf{y}) \subset t^{2n-2h} I, \end{cases}$$

où $(\mathbf{a} - \mathbf{y})$ désigne l'élément de A^N $(a_1 - y_1, a_2 - y_2, \dots, a_N - y_N)$.

Le choix de n supérieur strictement à $2h$ assure $2n - 2h > n$. On pourra donc construire ainsi une suite d'éléments de A^N qui converge vers $\mathbf{a}^0$.

Désignons par M la matrice jacobienne $(\partial f_i / \partial X_j)_{i=1, \dots, q; j=1, \dots, N}$, par $M(\mathbf{a})$ sa valeur en $\mathbf{a}$. Pour tout $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \in A^N$ on peut écrire un développement de Taylor :

$$(2) \quad \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{a} - \mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_q(\mathbf{a} - \mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_q(\mathbf{a}) \end{bmatrix} - M(\mathbf{a}) \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} + \sum_{i,j} y_i y_j Q_{ij}(\mathbf{a}, y),$$

où Q_{ij} est un q vecteur colonne dont les composantes sont des polynômes en y et $\mathbf{a}$. Il suffit pour assurer (1) de trouver $(\mathbf{y})$ congru à 0 modulo $t^{n-h} I$ et tel que l'on ait

$$(3) \quad \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_q(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \equiv M(\mathbf{a}) \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \pmod{t^{2n-2h} I};$$

les termes $y_i y_j Q_{ij}$ de (2) seront en effet tous congrus à 0 modulo $t^{2n-2h} I$ et (1) sera bien vérifié.

Soient p un entier $\in (1, q)$, (α) un multiindice $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p \leq q$, δ_α un mineur d'ordre p de la matrice jacobienne associée au système d'équations $(f_{x_1}, \dots, f_{x_p})$ et k_α un élément de K_α . Par définition H_b est engendré par des éléments de la forme $\partial_\alpha k_\alpha$. On va montrer que pour tout élément $k_\alpha \delta_\alpha$ du type précédent, on peut trouver $(z) = (z_1, \dots, z_N) \in A^N$ tel que $z_i \in t^n I$ et

$$(4) \quad k_\alpha(a) \partial_\alpha(a) \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_q(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \equiv M(\mathbf{a}) \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} \pmod{t^{2n} I}.$$

Montrons d'abord comment ceci implique le lemme. Puisque par hypothèse t^h appartient à l'idéal $H_b(\mathbf{a})$ on peut déduire de (5) qu'il existe

$(v) = (v_1, \dots, v_N) \in A^N$, où $v_i \in t^n I$, tel que

$$t^h \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_q(a) \end{bmatrix} \equiv M(a) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \pmod{t^{2n} I},$$

et puisque n a été choisi suffisamment grand pour que

$$\Lambda \cap (t^{n-h}) = (0),$$

on en déduira

$$\begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_q(a) \end{bmatrix} \equiv M(a) \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \pmod{t^{2n-h} I},$$

où y_i appartient à $t^{n-h} I$, $t^h y_i = v_i$. Ceci est ce qu'on avait annoncé en (3).

Il reste donc seulement à établir (4).

Prenons pour fixer les notations $(\alpha) = (1, \dots, p)$ et pour ∂_α le mineur d'ordre p de la matrice M correspondant aux p premières équations et aux premières variables.

On note seulement dans la suite ∂ pour ∂_α , k pour k_α . Par définition de k on peut trouver dans $A[X_1, \dots, X_N]$ des polynômes λ_{ij} tels que

$$kf_j = \sum_{i=1}^p \lambda_{ij} f_i, \quad \forall j \in [p+1, q],$$

ce qui, après dérivation par rapport à X_l , conduit à

$$k \frac{\partial f_j}{\partial X_l} = \sum_{i=1}^p \lambda_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial X_l} \pmod{J}, \quad \forall j \in [p+1, q], \quad \forall l \in [1, N];$$

en prenant les valeurs sur le vecteur a , on obtient pour tout $j \in [p+1, q]$ et tout $l \in [1, N]$:

$$(5) \quad \begin{cases} k(a) f_j(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_{ij}(a) f_i(a), \\ k(a) \frac{\partial f_j}{\partial X_l}(a) \equiv \sum_{i=1}^p \lambda_{ij}(a) \frac{\partial f_i}{\partial X_l}(a) \pmod{t^n}, \end{cases}$$

puisque $J(a) \subset t^n I \subset t^n$.

Ce dernier système de relations implique que, pour tout vecteur $\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_q \end{bmatrix}$ dans l'image de $M(a)$, on a

$$k(a) g_j \equiv \sum_{i=1}^p \lambda_{ij}(a) g_i \pmod{t^n}, \quad \forall j \in [p+1, q],$$

et plus précisément si

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_q \end{pmatrix} = M(a) \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix}$$

où les h_i appartiennent à un idéal $\mathfrak{X}$ de A , on a

$$(6) \quad \forall j > p, \quad k(a) g_j \equiv \sum_{i=1}^p \lambda_{ij} g_i \pmod{t^n \mathfrak{X}}.$$

Désignons par M_0 la matrice $(\partial f_i / \partial X_j(a))$ $1 \leq i, j \leq p$ et par N_0 la matrice (p, p) telle que

$$M_0 N_0 = N_0 M_0 = \partial(a) \text{Id}_p,$$

où Id_p représente la matrice unité d'ordre p .

Soit N'_0 la matrice (N, p) dont le carré supérieur est N_0 et qu'on prolonge par 0. Définissons $u_{p+1}, \dots, u_q$ par la formule

$$MN'_0 \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_p(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial(a) f_1(a) \\ \vdots \\ \partial(a) f_p(a) \\ u_{p+1} \\ \vdots \\ u_q \end{bmatrix}.$$

On a d'après (6), où l'on prend $\mathfrak{X} = t^n I$,

$$\forall j > p, \quad k(a) u_j \equiv \partial(a) \sum_{i=1}^p \lambda_{ij}(a) f_i(a) \pmod{t^{2n} I}.$$

Mais d'après (5) :

$$\forall j > p, \quad k(a) f_j(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_{ij}(a) f_i(a).$$

Donc

$$k(a) u_j \equiv k(a) \partial(a) f_j(a) \pmod{t^{2n} I}.$$

Donc

$$MN'_0 k(a) \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_p(a) \end{bmatrix} \equiv k(a) \partial(a) \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_q(a) \end{bmatrix} \pmod{t^{2n} I},$$

ce qu'on se proposait d'établir.

THÉORÈME 1. — Soient A un anneau noethérien complet pour la topologie définie par un idéal $\mathcal{J}$, B une A algèbre de type fini admettant une présentation

$$B = A[X_1, \dots, X_N]/J, \quad J = (f_1, \dots, f_q).$$

Alors pour tout entier h il existe un couple d'entiers (n_0, r) tel que si n est un entier $> n_0$ et si $(\mathbf{a}^0) = (a_1^0, \dots, a_N^0) \in A^N$ est tel que

$$\begin{aligned} H_B(\mathbf{a}^0) &\supset \mathcal{J}^h, \\ J(\mathbf{a}^0) &\subset \mathcal{J}^n, \end{aligned}$$

il existe $(\mathbf{a}) = (a_1, \dots, a_N) \in A^N$, congru à $\mathbf{a}^0$ modulo $\mathcal{J}^{n-r}$ et tel que

$$J(\mathbf{a}) = 0.$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur le nombre minimal d'éléments d'un système de générateurs d'un idéal de définition de la topologie $\mathcal{J}$ -adique.

Soit l ce nombre, pour $l = 0$ le résultat est trivial. Supposons le démontré pour $l - 1$ et soient $t_1, \dots, t_l$ des éléments de A engendrant un idéal de définition. On peut supposer de plus que les t_i appartiennent à $\mathcal{J}$.

Soit T l'idéal de A formé des éléments annulés par une puissance de t_l et soit k un entier tel que

$$T \cap (t_l)^k = (0) \quad (\text{Artin-Rees})$$

Fixons un entier s vérifiant $s > \sup(2h, h + k)$ et soit

$$A_1 = A/t_1^s.$$

Par hypothèse de récurrence appliquée à A_1 il existe n'_0 et s' tels que, pour tout n supérieur à n'_0 et tout $(\mathbf{a}) = (a_1, \dots, a_N) \in A^N$ vérifiant $J(\mathbf{a}) \subset \mathcal{J}^n$ on puisse trouver $(\mathbf{a}') = (a'_1, \dots, a'_N) \in A^N$ vérifiant $(\mathbf{a}') \equiv (\mathbf{a})$ modulo $\mathcal{J}^{n-r'}$ et $(\mathbf{a}') \subset t^s A^N$, tel que $J(\mathbf{a}') \subset t_1^s$.

On a en réalité

$$J(\mathbf{a}') \subset t_1^s \cap \mathcal{J}^{n-r'}.$$

D'après le lemme d'Artin-Rees, il existe donc un couple d'entiers (n_1, λ) tel que pour $n - r' > n_1$ on ait

$$J(\mathbf{a}') \subset t_1^s \cdot \mathcal{J}^{n-r'-\lambda}.$$

On a d'autre part

$$H_B(\mathbf{a}) \supset \mathcal{J}^h \quad \text{et} \quad H_B(\mathbf{a}) \subset H_B(\mathbf{a}') + \mathcal{J}^{n-r'}.$$

Si on fixe n assez grand pour que l'on ait $n - r' > h$ on en déduira par Nakayama,

$$H_B(\mathbf{a}') \supset \mathcal{J}^h,$$

donc

$$H_B(\mathbf{a}') \supset t_1^h.$$

Le lemme précédent implique alors qu'on peut trouver

$$(b) = (b_1, \dots, b_N) \in A^N,$$

tel que $J(b) = 0$ et tel que l'on ait pour tout $i \in [1, N]$:

$$b_i a_i' \in (t_1^{s-h} \mathcal{J}^{n-r'-\lambda}) \subset (\mathcal{J}^{n+s-(r'+\lambda+h)}),$$

ce qui établit le théorème.

Remarque. — Au lieu de supposer que B est une A -algèbre de type fini, on pourrait prendre pour B une A -algèbre formelle de type fini c'est-à-dire un quotient d'une algèbre de séries formelles restreintes à coefficients dans A . La même démonstration s'appliquait.

II. — Cas des couples henséliens

Le but de ce paragraphe est de généraliser aux couples henséliens les résultats de la première partie.

THÉORÈME 2. — Soient $(A, \mathcal{J})$ un couple hensélien noethérien et h un entier. Alors il existe un couple d'entiers (n_0, r) tel que si B est une A -algèbre de type fini,

$$B = A[X_1, \dots, X_N]/J,$$

n un entier supérieur à n_0 et $(a^0) = (a_1^0, \dots, a_N^0) \in A^N$ tel que

$$J(a^0) \subset \mathcal{J}^n,$$

$$H_B(a^0) \supset \mathcal{J}^h$$

(où H_B est un idéal de $A[X_1, \dots, X_N]$ ayant les propriétés indiquées en 0), alors il existe $(a) = (a_1, \dots, a_N) \in A^N$ congru à (a^0) modulo $\mathcal{J}^{n-r}$ et tel que $J(a) = 0$.

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 1 et de :

THÉORÈME 2 bis. — Soient $(A, \mathcal{J})$ un couple hensélien, $\hat{A}$ le complété $\mathcal{J}$ -adique de A , B une A -algèbre de type fini, $\bar{B} = B \otimes_A \hat{A}$. Soient V un ouvert de $\text{Spec } B$ lisse sur $\text{Spec } A$ et $\bar{V}$ son image réciproque dans $\text{Spec } \bar{B}$.

Alors pour tout entier n et toute $\hat{A}$ section $\bar{\varepsilon}$ de $\text{Spec } \bar{B}$ dont la restriction au-dessus de $\text{Spec } \hat{A} - V(\mathcal{J} \hat{A})$ se factorise à travers V , il existe une A -section de $\text{Spec } B$ congrue à $\bar{\varepsilon}$ modulo $\mathcal{J}^n$ et dont la restriction au-dessus de $\text{Spec } A - V(\mathcal{J})$ se factorise à travers V .

Avant de démontrer ce théorème ajoutons ici une remarque :

Remarque. — Il suffit de démontrer que pour tout n il existe une section ε de $\text{Spec } B$ congrue à $\bar{\varepsilon}$ modulo $\mathcal{J}^n$. En effet soit I un idéal de B

tel que $V = \text{Spec } B - V(I)$. L'hypothèse sur $\bar{\varepsilon}$ signifie qu'il existe un entier α tel que

$$\bar{\varepsilon}^*(I) \supset \mathfrak{J}^\alpha \hat{A}.$$

Alors toute section ε de B congrue à $\bar{\varepsilon}$ modulo $\mathfrak{J}^n$ ($n > \alpha$) sera telle que

$$\varepsilon^*(I) \supset \mathfrak{J}^\alpha$$

et se factorisera dont à travers V au-dessus de $\text{Spec } A - V(\mathfrak{J})$.

Le lemme suivant dû à Tougeron [10] donne des résultats plus précis que ceux du théorème 2 dans le cas où on suppose de plus que les mineurs de rang maximaux de la jacobienne sont inversibles dans $\text{Spec } B$ en dehors de $V(\mathfrak{J})$.

LEMME 2. — Soient $(A, \mathfrak{J})$ un couple hensélien, B une A -algèbre de type fini munie d'une présentation

$$B = A[X_1, \dots, X_N]/J, \quad J = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A[X_1, \dots, X_N].$$

Soit Δ l'idéal engendré par les mineurs d'ordre q de la matrice jacobienne

$$M = (\partial f_i / \partial X_j)_{i=1, \dots, q; j=1, \dots, N}.$$

Soient n et h deux entiers tels que, $n > 2h$ et $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N) \in A^N$ tel que

$$J(\mathbf{a}) \subset \mathfrak{J}^n \quad \text{et} \quad \Delta(\mathbf{a}) \supset \mathfrak{J}^h.$$

Alors il existe un élément $(\mathbf{a}') = (a'_1, \dots, a'_N) \in A^N$ vérifiant $(\mathbf{a}') \equiv \mathbf{a}$ modulo $\mathfrak{J}^{n-h}$ et $J(\mathbf{a}') = 0$.

Démonstration. — Soit $M(\mathbf{a})$ la matrice $(\partial f_i / \partial X_j(\mathbf{a}))_{i=1, \dots, q; j=1, \dots, N}$. Soit $(t_1, \dots, t_r)$ un système de générateurs de $\mathfrak{J}^h$; on peut trouver pour tout $i \in [1, r]$ une matrice (N, q) , soit N_i , telle que

$$M(\mathbf{a}) N_i = t_i \text{Id}_q,$$

où Id_q désigne la matrice unité de rang q .

Cherchons pour tout $i \in [1, r]$ des vecteurs $\mathbf{u}_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,N}) \in A^N$ vérifiant $u_{ij} \in \mathfrak{J}^{n-2h}$ pour tout $j \in [1, N]$ et tels que l'on ait pour tout $k \in [1, q]$:

$$f_k \left(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^r t_i \mathbf{u}_i \right) = 0.$$

Écrivons un développement de Taylor :

$$\begin{bmatrix} f_1 \left(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^r t_i \mathbf{u}_i \right) \\ \vdots \\ f_q \left(\mathbf{a} + \sum_{i=1}^r t_i \mathbf{u}_i \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_q(\mathbf{a}) \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^r t_i M(\mathbf{a}) \begin{bmatrix} u_{i,1} \\ \vdots \\ u_{i,N} \end{bmatrix} + \sum_{i,j} t_i t_j Q_{ij},$$

où Q_{ij} est un vecteur colonne dont les composantes sont des polynômes en $\mathbf{a}$ et $\mathbf{u}_i$ dont le terme de degré minimal en les $\mathbf{u}_i$ est de degré ≥ 2 .

On cherche donc à résoudre

$$(1) \quad 0 = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_q(\mathbf{a}) \end{bmatrix} + \sum_i^r t_i M(\mathbf{a}) \begin{bmatrix} u_{i,1} \\ \vdots \\ u_{i,N} \end{bmatrix} + \sum_{i,j} t_i t_j Q_{ij}.$$

On peut écrire

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_q(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \sum_{i,j} t_i t_j \begin{bmatrix} e_{ij,1} \\ \vdots \\ e_{ij,q} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad e_{ij,k} \in \mathcal{I}^{n-2h}.$$

L'équation (1) peut encore s'écrire

$$0 = \sum_i t_i M(\mathbf{a}) \left(\sum_j N_j \begin{bmatrix} e_{ij,1} \\ \vdots \\ e_{ij,q} \end{bmatrix} \right) + \sum_i t_i M(\mathbf{a}) \begin{bmatrix} u_{i,1} \\ \vdots \\ u_{i,N} \end{bmatrix} + \sum_i t_i M(\mathbf{a}) \left(\sum_j N_j Q_{ij} \right).$$

Pour la résoudre, il suffit alors de résoudre chacun des systèmes d'équations en les u_{ij} :

$$\begin{bmatrix} u_{i,1} \\ \vdots \\ u_{i,N} \end{bmatrix} + \sum_j N_j \left(Q_{ij} + \begin{bmatrix} e_{ij,1} \\ \vdots \\ e_{ij,q} \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Or 0 est solution approchée modulo $\mathcal{I}^{n-2h}$ de ce système, d'autre part la matrice jacobienne à l'origine est égale à la matrice unité d'ordre N . Ce système d'équations est donc étale au voisinage de la section modulo $\mathcal{I}^{n-2h}$ définie par $u_{ij} = 0$ et cette solution se relève donc en une solution vraie.

Soit u_i cette solution. L'élément $(\mathbf{a}') = (\mathbf{a}) + \sum t_i (u_i)$ définit la solution du système d'équations (f) annoncée.

LEMME 3. — Soient A un anneau noethérien, B une A -algèbre de type fini admettant une présentation $B = A[X_1, \dots, X_N]/J$, $J = (f_1, \dots, f_q)$. Soit V un ouvert de $\text{Spec } B$ lisse sur $\text{Spec } A$. Soient C l'algèbre symétrique du B -module J/J^2 et V' l'image réciproque de V dans $\text{Spec } C$.

Alors V' est lisse sur A de dimension relative constante N . Il existe un plongement de $\text{Spec } C$ dans l'espace affine de dimension $2N + q$ sur A tel que sur tout ouvert affine de $\text{Spec } C$ contenu dans V' le faisceau conormal de cette immersion soit libre de rang $N + q$ (c'est-à-dire qu'au voisinage d'un tel ouvert l'idéal définissant C dans l'espace affine considéré peut être engendré par $N + q$ équations).

Démonstration. — Désignons par r le morphisme structural

$$\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A,$$

par f le morphisme canonique $\text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } B$ et posons $g = f \circ r$.

Au voisinage d'un point de V où la dimension relative de B sur A est d , J/J^2 est localement libre de rang $N - d$, donc $\text{Spec } C$ au-dessus d'un tel point est lisse sur B de dimension relative $N - d$, et donc lisse sur A de dimension N . $\text{Spec } C$ est plongé dans l'espace affine de dimension q sur B . Soit I/I^2 le faisceau conormal de cette immersion

$$\text{Spec } C \hookrightarrow \text{Spec } B[Y_1, \dots, Y_q].$$

On peut aussi considérer $\text{Spec } C$ comme plongé dans $\text{Spec } A[X_1, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_q]$. Soit K/K^2 le faisceau conormal de cette immersion. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert affine de $\text{Spec } C$ contenu dans V' . On peut écrire au-dessus de $\mathcal{U}$, les suites exactes suivantes qui sont des suites exactes de modules localement libres sur un schéma affine, donc scindées :

$$(1) \quad 0 \rightarrow f^*(J/J^2)|_{\mathcal{U}} \rightarrow f^*(\Omega_{A[X]/A} \otimes_{A[X]} B)|_{\mathcal{U}} \rightarrow f^*(\Omega_{B/A})|_{\mathcal{U}} \rightarrow 0$$

où $f^*(\Omega_{A[X]/A} \otimes_{A[X]} B)$ est isomorphe à C^N ,

$$(2) \quad 0 \rightarrow f^*(\Omega_{B/A})|_{\mathcal{U}} \rightarrow \Omega_{C/A}|_{\mathcal{U}} \rightarrow \Omega_{C/B}|_{\mathcal{U}} \rightarrow 0.$$

Comme $\text{Spec } C$ est le fibré vectoriel associé au B -module J/J^2 , on a $\Omega_{C/B} \simeq f^*(J/J^2)$.

Il résulte de cette identification et des suites (1) et (2) que $\Omega_{C/A}$ est globalement libre de rang N au-dessus de $\mathcal{U}$. On a en effet :

$$\Omega_{C/A}|_{\mathcal{U}} \simeq f^*(J/J^2)|_{\mathcal{U}} \oplus f^*(\Omega_{B/A})|_{\mathcal{U}} \simeq C^N|_{\mathcal{U}}.$$

D'autre part, considérant $\text{Spec } C$ comme plongé dans l'espace affine sur A de dimension $N + q$, $\text{Spec } [X_1, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_q]$, on a les suites exactes

$$0 \rightarrow (K/K^2)|_{\mathcal{U}} \rightarrow \Omega_{A[X_1, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_q]/A} \otimes_{A[X_1, \dots, Y_q]} C|_{\mathcal{U}} \rightarrow \Omega_{C/A}|_{\mathcal{U}} \rightarrow 0.$$

Donc, compte tenu des isomorphismes précédents, on a une suite exacte

$$(3) \quad 0 \rightarrow (K/K^2)|_{\mathcal{U}} \rightarrow C^{N+q}|_{\mathcal{U}} \rightarrow C^N|_{\mathcal{U}} \rightarrow 0.$$

On plonge alors $\text{Spec } C$ dans $\text{Spec } A[X_1, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_q, T_1, \dots, T_N]$ dans lequel il est défini par les équations supplémentaires $T_i = 0$ pour $i \in [1, N]$. Soit K'/K'^2 le faisceau conormal associé à cette nouvelle immersion. Ce faisceau est globalement libre au-dessus de $\mathcal{U}$. On a en effet

$$(K'/K'^2)|_{\mathcal{U}} \simeq (K/K^2)|_{\mathcal{U}} \oplus C^N|_{\mathcal{U}} \simeq C^{N+q}|_{\mathcal{U}} \quad \text{d'après (3).}$$

Il existe donc $N + q$ éléments de $A[X_1, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_q, T_1, \dots, T_N]$ engendrant l'idéal définissant C dans un voisinage de $\mathcal{U}$ dans

$$\text{Spec } A[X_1, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_q, T_1, \dots, T_N].$$

On démontre maintenant le théorème 2 *bis* dans le cas où $\mathcal{J}$ est un idéal principal.

LEMME 4. — Soit $(A, \mathcal{J})$ un couple hensélien et supposons $\mathcal{J}$ -principal engendré par t . Soient $\hat{A}$ le complété $\mathcal{J}$ -adique de A , B une A -algèbre de type fini, V un ouvert de $\text{Spec } B$ lisse sur $\text{Spec } A$.

On pose

$$\bar{B} = B \otimes_A \hat{A}$$

et soit $\bar{V}$ l'image réciproque de V dans $\text{Spec } \bar{B}$.

Alors si $\bar{\varepsilon}$ est une $\hat{A}$ section de $\text{Spec } \bar{B}$ qui se factorise au-dessus de $\text{Spec } \hat{A} - V(\mathcal{J})$ à travers $\bar{V}$, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ une section ε de $\text{Spec } B$ congrue à $\bar{\varepsilon}$ modulo t^n qui se factorise au-dessus de $\text{Spec } A - V(\mathcal{J})$ à travers V .

Preuve. — Étant donné un plongement de $\text{Spec } B$ dans un espace affine sur A , on peut remplacer $\text{Spec } B$ par le fibré vectoriel du faisceau conormal de cette immersion.

En effet désignons par Q ce fibré.

Le plongement de $\text{Spec } B$ dans Q défini par la section nulle permet de relever $\bar{\varepsilon}$ à $Q \otimes_A \hat{A}$.

D'autre part une section de Q définit grâce au morphisme structural $Q \rightarrow \text{Spec } B$, une section de $\text{Spec } B$.

Cela revient à dire en vertu du lemme 3, qu'on peut identifier $\text{Spec } B$ à un fermé d'un espace affine $\text{Spec } A[X_1, \dots, X_N]$, défini par un idéal J , que V est lisse de dimension relative constante égale à d et qu'au voisinage de tout ouvert affine de V dans $\text{Spec } A[X_1, \dots, X_N]$, J peut être engendré par $N - d$ éléments.

Soient

$$\begin{aligned} j: \text{Spec } B &\hookrightarrow \text{Spec } A[X_1, \dots, X_N], \\ \bar{j}: \text{Spec } \bar{B} &\hookrightarrow \text{Spec } \hat{A}[X_1, \dots, X_N], \\ \bar{\varepsilon}: \text{Spec } \hat{A} &\rightarrow \text{Spec } \bar{B}, \end{aligned}$$

les morphismes donnés.

Montrons d'abord qu'il existe un ouvert affine de V dont l'image réciproque dans $\bar{V}$ contient $\bar{\varepsilon}(\text{Spec } \hat{A} - V(\mathcal{J}))$.

Soient H un idéal de $A[X_1, \dots, X_N]$ dont l'image dans B définit le complémentaire de V et $\bar{K}$ l'idéal de $\hat{A}[X_1, \dots, X_N]$ définissant le fermé $\bar{j} \circ \bar{\varepsilon}(\hat{A})$. Par hypothèse, il existe $\alpha \in \mathbf{N}$ tel que

$$H\hat{A}[X_1, \dots, X_N] + \bar{K} \supset t^\alpha \hat{A}[X_1, \dots, X_N].$$

Écrivons

$$t^\alpha = \bar{h} + \bar{k}, \quad \text{où } \bar{h} \in H\hat{A}[X_1, \dots, X_N] \text{ et } \bar{k} \in \bar{K}.$$

Et remplaçons $\bar{h}$ par un élément h de $A[X_1, \dots, X_N]$ vérifiant

$$h \in H \quad \text{et} \quad h \equiv \bar{h} \pmod{t^\beta}, \quad \beta > \alpha.$$

On peut écrire

$$h + \bar{k} = t^\alpha (1 + t\bar{y})$$

pour un certain $\bar{y}$ appartenant à $\hat{A}[X_1, \dots, X_N]$.

Comme $1 + t\bar{y}$ est inversible aux points de $\bar{\varepsilon}$. L'ouvert de $\text{Spec } B$ où h est inversible répond donc à la question. (Cet ouvert est non vide si t n'est pas nilpotent, le cas t nilpotent est trivial.)

Soient $(f_1, \dots, f_{N-d}) = (f)$ des éléments de J engendrant J au voisinage de $\text{Spec } B_h$ dans $A[X_1, \dots, X_N]$. Quitte à modifier h (sans changer l'ouvert $\text{Spec } B_h$) on peut supposer que $(f_1, \dots, f_{N-d})$ engendrent J sur l'ouvert $\text{Spec } A[X_1, \dots, X_N]_h$. Et quitte à remplacer h par une de ses puissances on peut supposer d'autre part qu'on a alors $hJ \subset (f)$.

De plus il existe un entier ϑ tel que

$$(\bar{j} \circ \bar{\varepsilon})^*(h) \supset t^\vartheta \hat{A}.$$

Soit Δ l'idéal engendré par les mineurs d'ordre $N - d$ de la matrice jacobienne associée à (f) . On peut trouver un entier γ tel que

$$(\bar{j} \circ \bar{\varepsilon})^*(\Delta) \supset t^\gamma \hat{A}.$$

Le lemme 2 permet d'affirmer que pour tout entier n on peut trouver une section ε de $\text{Spec } A[X_1, \dots, X_N]$ congrue à $\bar{\varepsilon}$ modulo t^n et telle que

$$\varepsilon^*(f_1, \dots, f_{N-d}) = 0.$$

Et pour $n > \vartheta$ on aura encore

$$\varepsilon^*(h) \supset t^\vartheta,$$

donc

$$t^\nu \varepsilon^*(J) = 0.$$

On aura de plus, puisque $\varepsilon \equiv \bar{\varepsilon} \pmod{t^n}$,

$$\varepsilon^*(J) \subset t^\nu.$$

Soit Λ l'idéal de A formé des éléments à support dans $V(t)$.

Si n est choisi assez grand pour que l'on ait

$$\Lambda \cap (t^n) = 0 \quad (\text{Artin-Rees}),$$

on aura alors

$$\varepsilon^*(J) = 0.$$

Ceci termine la démonstration du lemme 4.

Démonstration du théorème 2 bis. — On considère donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B = \text{Spec } A[X_1, \dots, X_N]/J & \xleftarrow{\quad} & \text{Spec } \bar{B} \\ \downarrow & & \downarrow \bar{\varepsilon} \\ \text{Spec } A & \xleftarrow{\quad} & \text{Spec } \hat{A} \end{array}$$

et un ouvert V de $\text{Spec } B$ lisse sur $\text{Spec } A$, d'image réciproque $\bar{V}$ dans $\text{Spec } \bar{B}$ et tel que

$$\bar{\varepsilon}(\text{Spec } \hat{A} - V(\mathcal{J})) \subset \bar{V}.$$

Soit n un entier arbitraire. On veut montrer qu'on peut trouver une section

$$\begin{aligned} \varepsilon : \text{Spec } A &\rightarrow \text{Spec } B, \\ \varepsilon &\equiv \bar{\varepsilon}(\gamma^n). \end{aligned}$$

On raisonne par récurrence sur le nombre minimal d'éléments d'un système de générateurs d'un idéal de définition de la topologie $\mathcal{J}$ -adique.

Soit l ce nombre. Pour $l=0$ le résultat est trivial. Supposons le démontré pour $l-1$ et soit $(x_1, \dots, x_l)$ un système de générateurs d'un idéal de définition contenu dans $\mathcal{J}$.

On désigne par A_1 le complété x_1 -adique de A et soit $B_1 = B \otimes_A A_1$.

Soit H_B un idéal de $A[X_1, \dots, X_N]$ comme il a été dit en 0.2 et tel que $V(H_B) \cap \bar{\varepsilon}(\text{Spec } \hat{A}) \subset V(\mathcal{J})$. Soit

$$\bar{j} : \text{Spec } \bar{B} \rightarrow \text{Spec } A[X_1, \dots, X_N].$$

L'hypothèse faite sur $\bar{\varepsilon}$ signifie qu'il existe un entier h tel que

$$(\bar{j} \circ \bar{\varepsilon})^*(H_B) \supset \mathcal{J}^h.$$

Soient encore

$$j_1 : \text{Spec } B_1 \rightarrow \text{Spec } A_1[X_1, \dots, X_N] \quad \text{et} \quad H_1 = H_B \otimes_A A_1.$$

On peut alors d'après le théorème 1 trouver un couple d'entiers (n_0, r) tel que, pour tout $n > n_0$ et toute section approchée de $\text{Spec } B_1$, soit

$$\varepsilon' : \text{Spec } A_1/x_1^n \rightarrow \text{Spec } B_1$$

satisfaisant à

$$(j_1 \circ \varepsilon')^*(H_1) \supset x_1^h,$$

il existe

$$\varepsilon'' : \text{Spec } A_1 \rightarrow \text{Spec } B_1,$$

congrue à ε' modulo x_1^{n-r} .

Fixons un entier $n > \sup(n_0, m + r, h + r)$ et appliquons l'hypothèse de récurrence au couple $(A/x_1^n = A_1/x_1^n, \mathcal{J}/x_1^n)$.

Il existe donc une section ε_1 approchée modulo x_1^n de B_1 au-dessus de A_1 et congrue à $\bar{\varepsilon}$ modulo $\mathcal{J}^n$. De plus, puisque n est supérieur à h , on a encore

$$\varepsilon_1^*(H_1) \supset \mathcal{J}^h A_1.$$

Étant donné le choix de n il existe donc une section

$$\varepsilon'_1 : \text{Spec } A_1 \rightarrow \text{Spec } B_1$$

congrue à ε_1 modulo x_1^{n-r} ce qui assure en particulier

$$\varepsilon'_1 \equiv \bar{\varepsilon} \pmod{x_1^m}.$$

Et on a encore

$$(j \circ \varepsilon'_1)^*(H_1) \supset \mathcal{J}^h.$$

Mais ceci traduit aussi que l'image de $(\text{Spec } A_1 - V(x_1))$ par ε' est contenue dans l'ouvert de lissité de B_1 . Il résulte maintenant du lemme 4 qu'on peut approcher ε_1 par une A section ε de B congrue à ε'_1 modulo x_1^m .

On aura donc

$$\varepsilon \equiv \bar{\varepsilon} \pmod{\mathcal{J}^m}.$$

COROLLAIRE 1. — Soit $(A, \mathcal{J})$ un couple hensélien, T un A -schéma affine, et $X = \text{Spec } B$ un T -schéma affine de type fini, lisse sur T en dehors du fermé $V(\mathcal{J})$. Pour toute section $\sigma : \text{Spec } A \rightarrow T$, désignons par X_σ le A -schéma déduit de X par le changement de base

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B = X & & \\ \downarrow & \swarrow & \\ T & & X_\sigma = \text{Spec } B_\sigma \\ \downarrow & \swarrow \sigma & \downarrow \\ \text{Spec } A & \xleftarrow{\text{Id}} & \text{Spec } A \end{array}$$

Alors il existe deux entiers n_0 et r tels que pour toute section $\sigma : \text{Spec } A \rightarrow T$ et tout entier $n > n_0$ et tout A -morphisme

$$\varepsilon_n : \text{Spec } A/\mathfrak{J}^n \rightarrow X_\sigma,$$

il existe une section

$$\varepsilon : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } X_\sigma,$$

congrue à ε_n modulo $\mathfrak{J}^{n-r}$.

En effet soient $B = T[X_1, \dots, X_N]/J$, $J = (f_1, \dots, f_r)$, une présentation de B au-dessus de T et H_B un idéal de $T[X_1, \dots, X_N]$, défini comme précédemment, et tel que

$$V(H_B) \cap \text{Spec } B \subset V(\mathfrak{J} B)$$

et soit $H_{B\sigma}$ l'image de H_B dans B_σ .

On aura quel que soit σ ,

$$V(H_{B\sigma}) \subset V(\mathfrak{J} B_\sigma).$$

Plus précisément il existe $z \in \mathbf{N}$ tel que

$$H_B B \supset \mathfrak{J}^z B$$

et on aura pour toute section σ :

$$H_{B\sigma} B_\sigma \supset \mathfrak{J}^z B_\sigma.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 2 pour conclure.

On a comme conséquence immédiate de ce qui précède le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soient $(A, \mathfrak{J})$ un couple hensélien, B une A -algèbre de type fini, lisse sur A , soient n un entier et ε_n un A -morphisme $\text{Spec } A/\mathfrak{J}^n \rightarrow \text{Spec } B$.

Alors il existe une section $\varepsilon : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } B$ relevant ε_n .

On aurait, bien sûr, pu démontrer ce résultat à moins de frais; le lemme 3 permet de supposer B globalement intersection complète relative sur A et le résultat est alors conséquence du lemme 2.

III. — Différentes applications

1. APPLICATIONS AUX MODULES. — Soient A un anneau, M un A -module, p et q deux entiers. On dira d'une présentation du module M de la forme

$$A^p \rightarrow A^q \rightarrow M \rightarrow 0$$

que c'est une présentation de type (p, q) .

THÉOREME 3. — Soient $(A, \mathcal{J})$ un couple hensélien, $\hat{A}$ le complété $\mathcal{J}$ -adique de A et $\bar{M}$ un $\hat{A}$ -module de type fini, localement libre au-dessus de l'ouvert $\text{Spec } \hat{A} - V(\mathcal{J}\hat{A})$. Alors il existe un A -module de type fini M localement libre au-dessus de l'ouvert $\text{Spec } A - V(\mathcal{J})$ et tel que $M \otimes_A \hat{A}$ soit $\hat{A}$ -isomorphe à $\bar{M}$.

Soit

$$\hat{A}^p \xrightarrow{\bar{L}} \hat{A}^q \rightarrow \bar{M} \rightarrow 0, \quad \bar{L} = (\bar{l}_{ij})_{i=1, \dots, p; j=1, \dots, q},$$

une présentation de $\bar{M}$.

On démontre en fait le résultat suivant :

Pour tout entier k on peut trouver une présentation

$$A^p \xrightarrow{L} A^q \rightarrow M \rightarrow 0$$

d'un A -module M tel que l'on ait $L \equiv \hat{L}$ modulo $(\mathcal{J}^k)$ et un isomorphisme de $\hat{M}$ sur $\bar{M}$ induit par des automorphismes de $\hat{A}^p$ et $\hat{A}^q$ congrus à l'identité modulo $\mathcal{J}^k$.

Démonstration :

(a) On commence par montrer qu'on peut approximer la présentation de $\bar{M}$ de façon à définir un A -module localement libre sur $\text{Spec } A - V(\mathcal{J})$.

En effet on peut classer les A -modules munis d'une présentation de type (p, q) par les matrices (p, q) donc par une algèbre de polynômes à pq variables sur A , soit $A[X] = A[(X_{ij})_{i=1, \dots, p; j=1, \dots, q}]$ et désignons aussi par $X = (X_{ij})$ la matrice (p, q) universelle.

Soit $\Delta^{(k)}$ l'idéal de $A[X_{ij}]$ engendré par la famille des polynômes correspondant aux mineurs de rang k de la matrice X .

Dire qu'un module, admettant une présentation de type (p, q) , est libre de rang r au voisinage d'un point équivaut à dire que les mineurs de rang $q - r + 1$ de la matrice associée sont nuls en ce point et qu'un des mineurs de rang $q - r$ y est inversible. La première condition traduit que le rang du module en ce point est au moins égal à r .

Désignons par U l'ouvert $\text{Spec } A - V(\mathcal{J})$, par $U_1, \dots, U_t$ ses différentes composantes connexes et soient $I_1, \dots, I_t$ des idéaux de A tels que

$$V(I_j) = \text{Spec } A - U_j.$$

Soient U' l'image réciproque de $\mathcal{U}$ dans $\text{Spec } \hat{A}$, $U'_1, \dots, U'_t$ celles des $\mathcal{U}_j$. On sait [4] qu'ils forment une décomposition en composantes connexes de $\mathcal{U}'$.

Pour tout $j \in [1, l]$ désignons par r'_j le rang du module $\overline{M}$ sur $\mathcal{U}'_j$, par β_j un entier tel que tout élément de A à support dans $V(I_j)$ soit annulé par $I_j^{\beta_j}$ et par $t_{j_1}, \dots, t_{j_k}$ un système de générateurs de $I_j^{\beta_j}$.

Soit B le quotient de $A[X_{11}, \dots, X_{pq}]$ défini par toutes les équations

$$t_{j\mu} \Delta^{q-r_j+1} = 0,$$

qui expriment que les mineurs de rang $q - r_j + 1$ sont nuls au-dessus de $\mathcal{U}_j$; la A -algèbre B classe les A -modules munis d'une présentation de type (p, q) et qui sont de rang au moins égal à r_j sur $\mathcal{U}_j$; la $\hat{A}$ -algèbre $B \otimes_A \hat{A}$ classe les $\hat{A}$ -modules de même type et de rang au moins égal à r_j sur $\mathcal{U}'_j$ ($\forall j \in [1, l]$).

Soient V_i l'ouvert de $\text{Spec } B$ au-dessus de $\mathcal{U}_i$, où l'idéal engendré par $(\Delta^{(q-r_i)})$ est l'idéal unité, $V = \bigcup_{i=1} V_i$, V' l'image réciproque de V

dans $\text{Spec } B \otimes_A \hat{A}$. La matrice $\overline{L}$ est définie par une $\hat{A}$ -section $\bar{\varepsilon}$ de $B \otimes_A \hat{A}$ telle que $\bar{\varepsilon}(U') \subset V'$.

Montrons que V est lisse sur $\text{Spec } A$:

Plaçons nous au voisinage d'un point de V_j et soit δ un des mineurs d'ordre $q - r_j$ inversible en ce point. Sous cette hypothèse les conditions qui expriment la nullité des mineurs d'ordre $q - r_j + 1$ obtenus en bordant δ par une ligne et une colonne sont évidemment lisses. De plus elles suffisent à entraîner la nullité de tous les mineurs d'ordre $q - r_j + 1$.

D'autre part on a pour $k \neq j$, $V(I_k I_j) = V(0)$. Donc $I_k I_j$ est nilpotent et d'après le choix des β_j , $I_k^{\beta_k}$ est nul là où I_j est inversible. Les conditions qui traduisent que $I_k^{\beta_k}$ annule Δ^{p-r_k+1} sont donc triviales en tout point de V_j , ce qui établit la lissité de V sur $\text{Spec } A$.

On peut donc (d'après le théorème 2), trouver pour tout $n \in \mathbb{N}$, une section ε de B congrue à $\bar{\varepsilon}$ modulo $\mathcal{J}^n$, se factorisant au-dessus de $\mathcal{U}$ à travers V et donc une matrice L congrue à $\overline{L}$ modulo $\mathcal{J}^n$ telle que le module M défini par

$$A^p \xrightarrow{L} A^q \rightarrow M \rightarrow 0$$

soit localement libre de rang r_i au-dessus de $\mathcal{U}_i$ ($\forall i \in [1, l]$).

(b) On se servira, pour terminer la démonstration du théorème, du lemme suivant :

LEMME 5. — Soient $(A, \mathcal{J})$ un couple hensélien noethérien, p, q, r, α des entiers. Il existe alors un couple d'entiers (n_0, s) ayant la propriété suivante :

Soient M et M' deux A -modules, localement libres de rang r en dehors du fermé $V(\mathcal{J})$, admettant des présentations

$$\begin{aligned} A^p &\xrightarrow{L} A^q \rightarrow M \rightarrow 0, \\ A^p &\xrightarrow{L'} A^q \rightarrow M' \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et tel que l'idéal de Fitting de rang r de M contienne $\mathcal{J}^\alpha$.

Alors si on a pour un entier $n > n_0$ un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^p/\mathcal{J}^n & \xrightarrow{L_n} & A^q/\mathcal{J}^n \\ u_n \downarrow & & \downarrow v_n \\ A^p/\mathcal{J}^n & \xrightarrow{L'_n} & A^q/\mathcal{J}^n \end{array}$$

où u_n et v_n sont des automorphismes de $A^p/\mathcal{J}^n$ et $A^q/\mathcal{J}^n$, M est isomorphe à M' et il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^p & \xrightarrow{L} & A^q \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ A^p & \xrightarrow{L'} & A^q \end{array}$$

où u et v sont des automorphismes de A^p et A^q congrus respectivement à u_n et v_n modulo $\mathcal{J}^{n-\alpha}$.

Démonstration. — On peut d'abord noter que si n est supérieur à α , ce qu'on suppose dans la suite, l'hypothèse implique que l'idéal de Fitting de rang r de M' contient aussi $\mathcal{J}^\alpha$.

Considérons alors la A -algèbre T classifiant les données suivantes :

- un couple de matrices (p, q) à coefficients dans A , soient $X = (X_{ij})$ et $X' = (X'_{ij})$ telles que
- leurs mineurs de rang $q - r + 1$ soient nuls en dehors de $V(\mathcal{J})$;
- les mineurs de rang $q - r$ de X (resp. de X') engendrent l'idéal $\mathcal{J}^\alpha$ dans A .

Précisons brièvement une description de T : c'est évidemment le produit tensoriel de deux algèbres, relatives l'une à X , l'autre à X' .

Soit $A[X_{ij}]$ classifiant les p -matrices $(p, q) : X = (X_{ij})_{i=1, \dots, p; j=1, \dots, q}$. Pour tout s soit $\Delta_s = (\partial_1, \dots, \partial_{k_s})$ la famille des mineurs d'ordre $q - s$ de X . Soient enfin $(t) = (t_1, \dots, t_p)$ un système de générateurs de $\mathcal{J}^\alpha$, λ un entier tel que $\mathcal{J}^\lambda$ annule tout élément de A à support dans $V(\mathcal{J})$ et $(u) = (u_1, \dots, u_d)$ un système de générateurs de $\mathcal{J}^\lambda$.

L'algèbre T peut alors s'écrire comme produit tensoriel de deux algèbres de la forme

$$A[(X_{ij})_{i=1, \dots, p; j=1, \dots, q}, (Y_{ij})_{i=1, \dots, p; j=1, \dots, k}] \left| u \Delta_{r-1}, \left(t_i - \sum_{j=1}^{k_r} Y_{ij} \delta_j \right)_{i=1, \dots, p} \right|.$$

Soit B la T -algèbre classifiant les couples de matrices carrées,
 U d'ordre p et V d'ordre q
 telles que

$$UX = X'V.$$

On vérifie aisément que l'algèbre B est lisse sur T en dehors de $V(\mathcal{J})$.

En effet localisons en un point x de $\text{Spec } T$ au-dessus de $\text{Spec } A - V(\mathcal{J})$ dont on note l'anneau local T_x . On a alors une décomposition en somme directe

$$\begin{aligned} T'_x &= \text{Ker } X_x \oplus \text{Coim } X_x = \text{Ker } X'_x \oplus \text{Coim } X'_x, \\ T'_x &= \text{Im}_x X_y \oplus \text{Coker } X_x = \text{Im } X'_x \oplus \text{Coker } X'_x. \end{aligned}$$

et l'assertion précédente résulte facilement de cette remarque.

D'autre part la donnée de M et M' munis de leurs présentations correspond à une A -section de T . Il suffit alors d'utiliser le corollaire 1 du théorème 2 pour terminer la démonstration du lemme 5.

Fin de la démonstration du théorème 3. — Le lemme 5 joint à la première partie de la démonstration permet de terminer immédiatement la démonstration du théorème 3 dans le cas où le rang de $\bar{M}$ est constant sur $\text{Spec } \hat{A} - V(\mathcal{J} \hat{A})$.

Le cas général résulte par exemple du lemme suivant analogue au lemme 5.

LEMME. — Soit $(A, \mathcal{J})$ un couple hensélien noethérien, M un A -module localement libre en dehors du fermé $V(\mathcal{J})$ muni d'une présentation

$$A^p \xrightarrow{L} A^q \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Alors il existe un couple d'entiers (n_0, s) ayant la propriété suivante : soit n un entier supérieur à n_0 et M' un A -module localement libre et de même rang que M en tout point de $\text{Spec } A - V(\mathcal{J})$ et muni d'une présentation

$$A^p \xrightarrow{L'} A^q \rightarrow M' \rightarrow 0$$

telle qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^p/\mathcal{J}^n & \xrightarrow{L_n} & A^q/\mathcal{J}^n \\ \downarrow u_n & & \downarrow v_n \\ A^p/\mathcal{J}^n & \xrightarrow{L'_n} & A^q/\mathcal{J}^n \end{array}$$

[où L_n et L'_n sont les réductions de L et L' et où u_n et v_n désignent des automorphismes de $A^p/\mathcal{J}^n$ et $A^q/\mathcal{J}^n$], alors il existe des automorphismes u et v de A^p et A^q respectivement, congrus à u_n et v_n modulo $\mathcal{J}^{n-s}$ et tels que $vL = uL'$.

Esquissons la démonstration. — Soit par $\bar{A}$ la A -algèbre finie obtenue en séparant les composantes connexes de $\mathcal{U}$. On a une suite exacte de A -modules.

$$0 \rightarrow H \rightarrow A \xrightarrow{j} \bar{A} \rightarrow K \rightarrow 0.$$

Et j est un isomorphisme en dehors de $V(\mathcal{J})$ de sorte qu'il existe un entier h tel que l'on ait

$$\mathcal{J}^h K = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{J}^h \cap H = 0.$$

Soit alors $n > h$ et

$$u_n: A^p/\mathcal{J}^n \xrightarrow{\sim} A^p/\mathcal{J}^n,$$

un automorphisme admettant un relèvement

$$\bar{u}: \bar{A}^p \xrightarrow{\sim} \bar{A}^q.$$

On démontre facilement qu'il existe un unique $u: A^p \xrightarrow{\sim} A^q$ tel que

$$\bar{u} = u \otimes_A \text{id}.$$

Le résultat en découle immédiatement. Et ceci achève la démonstration du théorème 3.

COROLLAIRE 1. — *Soient $\mathcal{U}$ l'ouvert complémentaire de $V(\mathcal{J})$ dans $\text{Spec } A$, $\mathcal{U}'$ son image réciproque dans $\text{Spec } \hat{A}$ et soit $\bar{P}$ un $\mathcal{U}$ -module localement libre de type fini. Alors il existe un module localement libre de type fini sur $\mathcal{U}$ dont l'image réciproque sur $\mathcal{U}'$ est isomorphe à $\bar{P}$.*

Il suffit de prolonger $\bar{P}$ en un $\hat{A}$ -module de type fini et d'appliquer le théorème 3.

LEMME. — *Avec les notations du corollaire 1 soient P et Q deux U -modules localement libres de type fini dont les images réciproques $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ sur $\mathcal{U}'$, sont isomorphes. Alors P et Q sont isomorphes.*

En effet soit $\bar{M}$ un $\hat{A}$ -module de type fini prolongeant $\bar{P}$ ou $\bar{Q}$.

D'après un résultat de [4] on peut trouver un A -module de type fini M (resp. N) dont le complété soit isomorphe à $\bar{M}$ et dont la restriction à $\mathcal{U}$ soit isomorphe à P (resp. Q).

M et N sont isomorphes puisqu'ils ont même complété donc P et Q sont isomorphes.

COROLLAIRE. — *L'application*

$$\text{Pic } U \rightarrow \text{Pic } \mathcal{U}'$$

est bijective, et A est parafactoriel [EGA IV, 21-13] si et seulement si $\hat{A}$ l'est.

C'est ce qu'expriment les deux résultats précédents appliqués aux modules inversibles.

Ce résultat a été démontré par J. Boutot [3] dans le cas où l'anneau A est local de dimension 2 ou lorsqu'il vérifie les conditions d'application du théorème d'approximation de M. Artin [1].

Le corollaire suivant permet de descendre des éclatements de $\hat{A}$ à support dans $V(\mathcal{J})$.

COROLLAIRE. — *Soit $\bar{J}$ un idéal de $\hat{A}$ localement libre de rang 1 au-dessus de $\mathcal{U}$. Alors pour tout n il existe un idéal J de A congru à $\bar{J}$ modulo $\mathcal{J}^n$ et tel que les $\hat{A}$ -modules $J\hat{A} = J \otimes_A \hat{A}$ et $\bar{J}$ soient isomorphes.*

Soit

$$A^p \xrightarrow{L} A^q \rightarrow M \rightarrow 0, \quad L = (l_{ij}) \quad (i \in [1, p], j \in [1, q],$$

une présentation d'un A -module M , localement libre de rang 1 au-dessus de $\mathcal{U}$ et dont le complété est isomorphe à $\bar{J}$. On veut réaliser M comme idéal de A .

Le morphisme $M \otimes_A \hat{A} \xrightarrow{\sim} J \rightarrow \hat{A}$ définit une section $\bar{\varepsilon}$ au-dessus de $\hat{A}$ du fibré vectoriel de $M \otimes_A \hat{A}$. Soit

$$B = A[Y_1, \dots, Y_q] \left| \left(\sum_{j=1}^q l_{ij} Y_j \right)_{i=1, \dots, p} \right.$$

l'algèbre symétrique de ce $\hat{A}$ -module, et soit $(\bar{y}_i)_{i=1, \dots, q}$ le système de générateurs de $\bar{\mathcal{J}}$ dans $\hat{A}$ défini par

$$y_i = \bar{\varepsilon}(Y_i).$$

Soit, de plus, s un entier suffisamment grand pour que l'on ait dans $\hat{A}$:

$$\mathcal{J}^{s+k} \hat{A} \cap \bar{J} \subset \mathcal{J}^k \bar{J}, \quad \forall k \geq 0 \quad (\text{Artin-Rees})$$

et fixons $n > s$. On peut approximer $\bar{\varepsilon}$ par une A -section, ε' ; de $\text{Spec } B$, congrue à $\bar{\varepsilon}$ modulo $\mathcal{J}^n$. On en déduit un complexe

$$(\star) \quad A^p \xrightarrow{L} A^q \rightarrow A.$$

L'image de A^q dans A est un idéal J dont un système de générateurs est constitué par les éléments

$$y_i = \varepsilon(Y_i)$$

et on a

$$y_i \equiv \bar{y}_i \pmod{\mathcal{J}^n}.$$

Tensorisons $(\star)$ par $\hat{A}$; on obtient un complexe.

$$\hat{A}^p \xrightarrow{\hat{L}} \hat{A}^q \rightarrow \hat{A}.$$

Comme $\bar{J}$ est isomorphe au conoyau de $\hat{L}$, on a une surjection de $\hat{A}$ -modules

$$\bar{J} \rightarrow J \otimes_{\hat{A}} \hat{A}.$$

Et il reste à montrer que c'est un isomorphisme.

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \hat{A}^p & \xrightarrow{L} & \hat{A}^q & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \bar{J} \\ & \searrow \pi & \downarrow f & \searrow & \downarrow \\ & & J & \otimes_{\hat{A}} & \hat{A} \end{array}$$

dans lequel $\bar{\pi}$ (resp. π) est l'application définie par $\bar{\pi}(e_i) = \bar{y}_i$ [resp. $\pi(e_i) = y_i$], si $(e_i, \dots, e_q)$ est la base canonique de $\hat{A}^q$, et f l'application linéaire définie par $f(\bar{y}_i) = y_i$.

On a pour tout élément j de $\bar{J}$, $f(j) \equiv j$ modulo $\hat{A}^n$.

On a donc

$$\text{Ker } f \subset \bar{J} \cap \hat{A}^n,$$

donc

$$\text{Ker } f \subset \bar{J} \cap \hat{A}^{n-s} \quad (\text{Artin-Rees})$$

Mais soit α un entier et $j \in \hat{A}^\alpha \bar{J} \cap \text{Ker } f$.

On peut écrire

$$j = \sum m_i \bar{y}_i = \sum_{i=1}^q m_i \bar{\pi}(e_i), \quad m_i \in \hat{A}^\alpha.$$

On a donc dans $\hat{A}$:

$$j = (\bar{\pi} - \pi) \left(\sum m_i e_i \right) = \sum m_i (\bar{y}_i - y_i),$$

donc $j \in \hat{A}^{n+\alpha-s} \bar{J}$.

Il résulte qu'on a en fait

$$\text{Ker } f \subset \bar{J} \cap \left(\bigcap_{\alpha} \hat{A}^\alpha \right).$$

Donc $\text{Ker } f = 0$ et f est un isomorphisme des $\hat{A}$ -modules $\bar{J}$ et $J \otimes_{\hat{A}} \hat{A}$, ce qui établit le corollaire.

2. APPLICATIONS AUX ALGÈBRES FINIES. — On conserve les notations précédentes.

Le but de ce paragraphe est le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — Soit $\bar{C}$ une $\hat{A}$ -algèbre finie, supposée localement intersection complète relative [EGA IV, 19.3.6] au-dessus de $\mathcal{U}'$. Alors pour tout n il existe une A -algèbre finie C localement intersection complète au-dessus de l'ouvert U congrue à $\bar{C}$ modulo $\mathcal{I}^n$ et telle que l'isomorphisme d'algèbres de $C/\mathcal{I}^n$ sur $\bar{C}/\mathcal{I}^n$ se relève en un isomorphisme des $\hat{A}$ -modules $\bar{C}$ et $C \otimes_A \hat{A}$.

DÉFINITION. — Soit

$$A^p \xrightarrow{L} A^q \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0, \quad L = (l_{ij})_{i=1, \dots, p; j=1, \dots, q}$$

une présentation d'un A -module M .

Une structure de A -algèbre commutative sur M muni ed'une rigidification associée à la présentation consiste en la donnée des applications A -linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} m : A^q \otimes A^q &\rightarrow A^q && \text{symétrique} \\ \varphi : A^p \otimes_A A^q &\rightarrow A^p, \\ \varepsilon : A &\rightarrow A^q, \\ \psi : A^q \otimes_A A^q \otimes_A A^q &\rightarrow A^p, \\ y : A^q &\rightarrow A^p, \end{aligned}$$

satisfaisant aux relations :

$$(a) \quad m(L \otimes 1) = L \circ \varphi,$$

cette relation exprime que m passe au quotient et permet de définir une application bilinéaire symétrique sur M .

$$(b) \quad m(1 \otimes m) - m(m \otimes 1) = L \circ \varphi \text{ (associativité).}$$

$$(c) \quad m(1 \otimes \varepsilon) - \text{Id}/A^q = L y,$$

cette relation traduit que $\pi \circ \varepsilon(1)$ définit sur M un élément neutre pour la multiplication et $\pi \circ \varepsilon$ munit M d'une structure de A -algèbre.

LEMME :

(i) Le foncteur des structures d'algèbres rigidifiées sur M est représentable par un A -schéma affine de type fini X .

(ii) Supposons M localement libre et soit $\mathcal{A}$ la O_X -algèbre universelle sous-jacente à $M \otimes_A O_X$. Le sous-foncteur de X qui rend $\mathcal{A}$ intersection complète relative au-dessus de X est représentable par un ouvert V de X lisse sur A .

(i) La démonstration en est très simple.

Soient en effet $(e_i)_{i=1, \dots, p}$ une base de A^p , $(\varepsilon_j)_{j=1, \dots, q}$ une base de A^q . On peut classer l'application m (resp. φ , ψ , ε , y) par des variables $(m_{ijk})_{i,j,k \in [1, q]}$ (resp. φ_{ij} , ψ_{ijk} , ε_i , y_{ij}) où m_k^{ij} représente la composante sur ε_k de $m(\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j)$.

Explicitons alors seulement la relation (b) à titre d'exemple $\forall i, j, k, \lambda \in [1, q]$:

$$\left(\sum_{\mu=1}^q m_{ij}^{\mu} \right) m_{\mu k}^{\lambda} - \left(\sum_{\nu=1}^q m_{jk}^{\nu} \right) m_{\mu i}^{\lambda} = \sum_{v=1}^p \psi_{ijk}^v l_{\lambda v}.$$

(ii) Il est facile de voir que ce sous-foncteur est représentable par un ouvert de X soit V .

Vérifier la lissité de V revient à vérifier la propriété suivante.

Soient B un anneau local, B_0 un quotient de B par un idéal nilpotent

$$B^p \rightarrow B^q \rightarrow M \rightarrow 0$$

une présentation d'un B -module libre induisant

$$B_0^p \rightarrow B_0^q \rightarrow M_0 = M \otimes_B B_0 \rightarrow 0.$$

Supposons donnée sur M_0 une structure de B_0 algèbre rigidifiée intersection complète. Alors cette structure se relève. Relevons d'abord la structure d'algèbre. On sait qu'il n'y a pas d'obstruction à relever une intersection complète. On vérifie ensuite sans difficulté que les différentes rigidifications introduites se relèvent.

Démonstration du théorème. — Soit

$$A^p \xrightarrow{L} A^q \rightarrow M \rightarrow 0$$

une présentation d'un A -module M dont le complété est $\hat{A}$ -isomorphe à $\bar{C}$. On sait que ceci est possible grâce au théorème 3.

Considérons le schéma X sur A défini dans le lemme et soit V l'ouvert de X au-dessus de $\mathcal{U}$ au-dessus duquel $\mathcal{C}$ est localement intersection complète. Soient $\bar{X} = X \otimes_A \hat{A}$ et $\bar{V}$ l'image réciproque de V dans $\bar{X}$.

L'algèbre $\bar{C}$ correspond à une $\hat{A}$ -section $\bar{\varepsilon}$ de $\bar{X}$ telle que $\bar{\varepsilon}(U') \subset \bar{V}$.

Le théorème 4 résulte alors immédiatement du théorème 2 bis.

3. THÉORÈME 5. — *L'application $B \rightarrow B \otimes_A \hat{A}$ est une équivalence de catégories entre la catégorie des A -algèbres finies, induisant un revêtement étale de $\mathcal{U}$ et la catégorie correspondante sur $\hat{A}$ et $\mathcal{U}'$.*

(a) Montrons d'abord qu'une $\hat{A}$ -algèbre finie, étale sur $\mathcal{U}'$ se descend à A .

L'ensemble des points où une algèbre est étale étant un ouvert contenu dans l'ensemble des points où elle est intersection complète relative, le raisonnement qui a permis d'établir le théorème 4 s'applique ici et permet d'approcher les $\hat{A}$ -algèbres finies, étales sur $\mathcal{U}'$ par des A -algèbres finies, étales sur $\mathcal{U}$.

Soit $\bar{C}$ une $\hat{A}$ -algèbre finie, étale sur $\mathcal{U}'$, M un A -module tel que $M \otimes_A \hat{A}$ soit isomorphe à $\bar{C}$ et muni d'une présentation

$$A'' \rightarrow A' \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Soit X le schéma défini au paragraphe précédent et $\mathcal{A}$ l'algèbre universelle.

Soit $j : \text{Spec } \mathcal{A} \rightarrow \text{Spec } X[Y_1, \dots, Y_N]$ un plongement de $\mathcal{A}$ dans un espace affine sur X et $H_{\mathcal{A}}$ un idéal définissant le lieu singulier de $\mathcal{A}$ [l'idéal H a été défini au paragraphe 0].

Soit G l'ouvert de X au-dessus duquel $\mathcal{A}$ est étale. L'algèbre $\bar{C}$ correspond à une section $\bar{\varepsilon}$ de $X \otimes_A \hat{A}$ qui se factorise au-dessus de $\mathcal{U}'$ à travers G .

Si $H_{\bar{C}}$ désigne l'image réciproque de $H_{\mathcal{A}}$ par $\bar{\varepsilon}$ il existe un entier h tel que

$$H_{\bar{C}} \supset \mathcal{J}^h \bar{C}.$$

D'après le théorème 1 il existe un couple (n_0, r) tel que pour tout $n > n_0$ et toute section σ_n approchée modulo $\mathcal{J}^n \bar{C}$ d'une $\bar{C}$ -algèbre C' telle que

$$\sigma_n^*(H_{C'}) \supset \mathcal{J}^h \bar{C}.$$

On puisse trouver une section

$$\sigma : \text{Spec } \bar{C} \rightarrow \text{Spec } C'$$

congrue à σ_v modulo $\mathcal{J}^{n-r}$.

Fixons n supérieur à n_0 et h et soit C une A -algèbre définie par une section ε de X , congrue à $\bar{\varepsilon}$ modulo $\mathcal{J}^n$ et se factorisant à travers G au-dessus de $\mathcal{U}'$.

Il résulte du choix de n qu'on aura encore $H_C \supset \mathcal{J}^h C$ et que l'isomorphisme de $C/\mathcal{J}^n C$ sur $\bar{C}/\mathcal{J}^n \bar{C}$ est congru mod $\mathcal{J}^{n-r}$ à un morphisme des A -algèbres

$$\varphi : C \otimes_A \hat{A} \rightarrow \bar{C}.$$

On voit facilement alors que φ est un isomorphisme.

En effet cette application est surjective. De plus l'isomorphisme $C/\mathcal{I}^n C \rightarrow \bar{C}/\mathcal{I}^n \bar{C}$ provient par construction d'un isomorphisme des modules C et $\bar{C}$, de sorte que φ , congrue modulo $\mathcal{I}^{n-r}$ à un isomorphisme de modules est un isomorphisme des modules et donc des algèbres.

(b) Soient B et B' deux A -algèbres finies, étales en dehors de $V(\mathcal{I})$. Pour terminer la démonstration du théorème 5 il suffit de montrer que l'application

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B, B') \rightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{A}\text{-alg}}(B \otimes_A \hat{A}, B' \otimes_A \hat{A})$$

est bijective.

Un changement de base $A \rightarrow B'$ permet de se ramener au cas où $B' = A$.

Soit donc B finie sur A étale au-dessus de $\mathcal{I}$ et

$$\bar{\varepsilon}: B \otimes_A \hat{A} \rightarrow \hat{A}.$$

On sait (théorème 2 bis) que pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe une A -section ε de B congrue à $\bar{\varepsilon}$ modulo $\mathcal{I}^n$. Il suffit donc de montrer la proposition suivante :

Il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que toute section de $\bar{B} = B \otimes_A \hat{A}$ congrue à $\bar{\varepsilon}$ modulo $\mathcal{I}^n$ soit égale à $\bar{\varepsilon}$.

La démonstration de cette proposition figure dans M. Artin [1]. Nous allons la rappeler néanmoins. Soient T l'idéal de A formés des éléments à support dans $V(\mathcal{I})$, A_0 le quotient de A par T et $B_0 = B \otimes_A A_0$.

Soit n un entier assez grand pour que toute $\hat{A}_0$ -section de $\hat{B}_0$ congrue à $\bar{\varepsilon}_0$ modulo $\mathcal{I}^n$ soit égale à $\bar{\varepsilon}_0$ et pour que l'on ait

$$T \cap \mathcal{I}^n = (0).$$

Il est clair qu'alors ε congru à $\bar{\varepsilon}$ modulo $\mathcal{I}^n$ implique $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$. On peut donc supposer A sans section à support dans $V(\mathcal{I})$. Sous cette hypothèse le noyau d'une section $\varepsilon: B \otimes_A \hat{A} \rightarrow \hat{A}$ est entièrement déterminé par sa donnée au-dessus de U' et puisque $\mathrm{Spec} \bar{B}/\mathcal{U}'$ est étale sur $\mathcal{U}'$ elle est déterminée par la partie ouverte et fermée de $\mathrm{Spec} \bar{B}/\mathcal{U}'$, sous-jacente à $\varepsilon(\mathcal{U}')$. Il existe donc un nombre fini de sections, ce qui termine la démonstration de la proposition donc du théorème.

COROLLAIRE. — Avec les notations précédentes supposons U (donc U') connexe.

On a

$$\pi_1(U) = \pi_1(U').$$

4. APPROXIMATIONS D'ALGÈBRES LISSES.

THÉORÈME 6. — Soit $(A, \mathcal{J})$ un couple hensélien noethérien. Alors toute $A/\mathcal{J}$ -algèbre lisse $\bar{B}$ se relève en une A -algèbre lisse B .

Démonstration. — Posons

$$A/\mathcal{J} = \bar{A}.$$

(a) Supposons d'abord $\bar{B}$ intersection complète relative sur $\bar{A}$ c'est-à-dire supposons qu'elle admet une présentation

$$\bar{B} = \bar{A}[X_1, \dots, X_N]/\bar{J}, \quad \bar{J} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m),$$

et que l'idéal engendré par les mineurs de rang m de la matrice jacobienne $(\partial f_i / \partial X_j)_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, N}$ est l'idéal unité dans $\bar{B}$. Dans ce cas il suffit de relever les $\bar{f}_i$ en f_i dans $[X_1, \dots, X_N]$.

L'algèbre $B = A[X_1, \dots, X_N]/(f_i)$ est lisse au voisinage du fermé $V(\bar{J})$ et un localisé de B répond à la question.

(b) Dans le cas général soit

$$\bar{B} = \bar{A}[X_1, \dots, X_N]/\bar{J}, \quad \bar{J} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_q),$$

une présentation de B .

Le $\bar{B}$ -module $\bar{J}/\bar{J}^2$ est localement libre sur $\bar{B}$. Soit $\bar{B}^p \xrightarrow{f} \bar{B}^q \rightarrow 0$ une présentation de ce B -module et soit $\bar{C}$ son algèbre symétrique.

$\bar{C}$ est lisse sur $\bar{A}$ de dimension relative N et globalement intersection complète d'après un lemme antérieur.

Il existe donc une A -algèbre lisse C induisant $\bar{C}$ sur $\bar{A}$.

Considérons le diagramme suivant dans lequel les morphismes sont les morphismes canoniques

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } C & \xleftarrow{\quad} & \text{Spec } \bar{C} \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Spec } A & \xleftarrow{\quad} & \text{Spec } A/\mathcal{J} \end{array}$$

Soit $\bar{M} = f^*(\bar{J}/\bar{J}^2)$. C'est un $\bar{C}$ -module localement libre muni d'une présentation

$$\bar{C}^p \xrightarrow{\bar{f}} \bar{C}^q \rightarrow \bar{M} \rightarrow 0.$$

Si on désigne par $\tilde{C}$ le hensélisé $\mathcal{J}$ -adique de C , il existe un $\tilde{C}$ -module localement libre M admettant une présentation de même type que $\bar{M}$ et relevant le $\bar{C}$ -module $\bar{M}$ (muni de sa présentation).

Quitte à remplacer C par un voisinage étale de $\mathcal{J}$ dans C on peut supposer M défini sur C et muni de la présentation.

$$C^p \xrightarrow{L} C^q \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Soit alors

$$D = C[Y_1, \dots, Y_q] / \left(\sum l_{ij} Y_j \right)$$

l'algèbre symétrique de ce module, et considérons

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec } D & \longleftarrow & \text{Spec } D \otimes_C \bar{C} & \simeq & \text{Spec } \bar{C} \otimes_B \bar{C} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Spec } C & \longleftarrow & \text{Spec } \bar{C} & & \\ & & \downarrow f & \uparrow j & \\ & & \text{Spec } B & & \end{array}$$

$\text{Spec } D$ est lisse sur C si bien que, quitte à remplacer encore C par un voisinage étale de $\mathcal{J}$ dans C on peut supposer que la section diagonale

$$\text{Spec } \bar{C} \xrightarrow{\Delta} \text{Spec } \bar{C} \otimes_B \bar{C} = \text{Spec } \bar{C} \otimes_C D$$

se relève en une section $\Delta : \text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } D$.

Soit K l'idéal de C image réciproque par Δ de l'idéal $(Y_1, \dots, Y_q)$ de D .

Le quotient de C par l'idéal K est une A -algèbre lisse relevant $\bar{B}$.

On répond en particulier à la question de Monsky qui se demandait dans [11] s'il existait un relèvement « faiblement complet » d'une algèbre lisse définie sur $A/\mathcal{J}$. Ceci est en effet impliqué par l'existence d'un relèvement algébrique.

ALGÉBRISATION D'ALGÈBRES FORMELLES LISSES EN DEHORS D'UN FERMÉ. — Soit $\hat{A}$ un anneau complet pour une topologie $\mathcal{J}$ -adique. Soit encore $\hat{B}$ une $\hat{A}$ -algèbre formelle de type fini

$$\hat{B} = \hat{A}\{X_1, \dots, X_N\}/J, \quad J = (f_1, \dots, f_m).$$

On dira que $\hat{B}$ est *formellement lisse* sur $\hat{A}$ en dehors de $V(J)$ si en tout point x de $\text{Spec } \hat{B} - V(\mathcal{J} \hat{B})$ il existe un entier d et une famille $f_1, \dots, f_d$,

d'éléments de $\mathcal{J}$ engendrant cet idéal dans un voisinage de x dans $\text{Spec } \hat{A} \{X_1, \dots, X_N\}$ et telle que les mineurs d'ordre d de la jacobienne $(\partial f_i / \partial X_j)_{i=1, \dots, d; j=1, \dots, N}$ engendrent l'idéal unité en ce point.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 7. — Soient $(A, \mathcal{J})$ un couple hensélien noethérien, $\hat{A}$ le complété $\mathcal{J}$ -adique de A et supposons $\mathcal{J}$ principal, $\mathcal{J} = (a)$.

Soit $\hat{B}$ une $\hat{A}$ -algèbre formelle de type fini, formellement lisse sur $\hat{A}$ en dehors de $V(\mathcal{J})$. Alors il existe une A -algèbre de type fini B' lisse sur $\text{Spec } A$ en dehors de $V(\mathcal{J})$ dont le complété formel est isomorphe à $\hat{B}$.

On démontre d'abord le lemme suivant (qui ne suppose pas $\mathcal{J}$ -principal).

LEMME 6. — Soit $\hat{B} = \hat{A} \{X_1, \dots, X_N\} / J$, $J = (f_1, \dots, f_m)$, une $\hat{A}$ -algèbre formellement lisse en dehors de $V(J)$.

Donnons-nous une présentation du $\hat{A} \{X\}$ module J (on écrit $\hat{A} \{X\}$ pour $\hat{A} \{X_1, \dots, X_N\}$) :

$$A \{X\}^q \xrightarrow{L} A \{X\}^m \rightarrow J \rightarrow 0.$$

Alors il existe un couple n_0, r ayant la propriété suivante. Si n est un entier supérieur à n_0 et $\hat{B}'$ un quotient de $\hat{A} \{X_1, \dots, X_N\}$ défini par des équations $f'_1, \dots, f'_m$ vérifiant $f'_i \equiv f_i (\mathcal{J}^n)$, $i \in [1, m]$, et un système de relations $L' f' = 0$ dans lequel L' est une matrice (q, m) à coefficients dans $\hat{A} \{X_1, \dots, X_N\}$ congrue à L modulo $\mathcal{J}^n$, alors il existe un $\hat{A}$ -automorphisme de $\hat{A} \{X_1, \dots, X_N\}$ congru à l'identité modulo $\mathcal{J}^{n-r}$ et induisant un isomorphisme de $\hat{B}$ sur $\hat{B}'$.

Démonstration. — Associons à $\hat{B}$ un idéal H_B comme au paragraphe 1 (engendré par des produits de mineurs de L et de $(\partial f_i / \partial X_j)$).

Il existe $h \in \mathbf{N}$ tel que

$$H_B + J \supset \mathcal{J}^h \hat{A} \{X\}.$$

Pour $n > h$ on aura encore $\hat{B}'$ formellement lisse sur $\text{Spec } \hat{A}$ en dehors de $V(\mathcal{J})$ et

$$H'_B + J' \supset \mathcal{J}^h \hat{A} \{X\}.$$

Ceci est clair sur la définition de H , puisqu'on pourra prendre

$$H'_B \equiv H_B \pmod{\mathcal{J}^h}.$$

On suppose donc $n > h$ dans la suite. On cherche alors une section au-dessus de $\hat{B}$ de

$$\begin{array}{c} \text{Spec } \hat{B} \times_{\hat{A}} \text{Spec } \hat{B}' \\ \downarrow \\ \text{Spec } \hat{B} \end{array}$$

qui soit congrue à la diagonale modulo $\mathcal{I}^{n-r}$.

D'après le théorème 1 et la remarque qui le suit, il existe un couple d'entiers (n_1, s) tels que pour $n > n_1$ on puisse trouver un morphisme $\sigma : \hat{B}' \rightarrow \hat{B}$ congru modulo $\mathcal{I}^{n-s}$ à l'isomorphisme donné modulo $\mathcal{I}^n$. Il reste à montrer que pour n assez grand σ est un isomorphisme.

On peut trouver un $\hat{A}$ -morphisme

$$\varphi : \hat{A}\{X\} \rightarrow \hat{A}\{X\}$$

congru à l'identité modulo $\mathcal{I}^{n-s}$, et tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & J' & \rightarrow & \hat{A}\{X\} & \rightarrow & \hat{B}' \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \varphi & & \downarrow \sigma \\ 0 & \rightarrow & J & \rightarrow & \hat{A}\{X\} & \rightarrow & \hat{B} \rightarrow 0 \end{array}$$

On veut montrer que pour n assez grand on a

$$\varphi(J') = J.$$

On a évidemment $\varphi(J') \subset J$ puisque le diagramme commute.

De plus

$$J \subset \varphi(J') + \mathcal{I}^{n-s} \cap J, \quad \text{car } J \equiv J'(\mathcal{I}^h) \text{ et } \varphi \equiv \text{id}_{\hat{A}\{X\}}(\mathcal{I}^{n-s}).$$

On déduit de ces deux inclusions que

$$J \subset \varphi(J') + \mathcal{I}^{n-s} \cap J.$$

D'après le théorème d'Artin-Rees, ceci assure que pour n assez grand (ne dépendant que de J) on aura

$$\mathcal{I}^{n-s} \cap J \subset \mathcal{I} J,$$

donc

$$J \subset \varphi(J') + \mathcal{I} J,$$

donc

$$J \subset \varphi(J')$$

ce qui démontre le lemme.

On démontre maintenant le théorème dans un cas particulier.

LEMME 7. — Soit $\hat{B}$ comme dans le théorème 7. On fait l'hypothèse supplémentaire que le système d'équations $(f_1, \dots, f_d)$ engendre J au voisinage de $\text{Spec } \hat{B} - V(J)$ dans $\text{Spec } \hat{A} \{X_1, \dots, X_N\}$ (d est la codimension de $\hat{B}$ dans $\hat{A} \{X_1, \dots, X_N\}$ en ces points).

Alors il existe un A -schéma affine de type fini lisse en dehors de $V(a)$ dont le complété formel est $\hat{A}$ -isomorphe à $\text{Spf } \hat{B}$.

Démonstration. — Considérons le fermé $V(f_1, \dots, f_d)$ dans $\text{Spec } \hat{A} \{X_1, \dots, X_N\}$. Au-dessus de l'ouvert $\text{Spec } \hat{A}_a$, $\text{Spec } \hat{B} \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_a$ est une partie ouverte et fermée de $\text{Spec } \hat{A} \{X_1, \dots, X_N\} / (f_1, \dots, f_d) \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_a$. Il lui correspond un idempotent e . On peut écrire dans $\hat{A} \{X\} \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_a$:

$$e(1 - e) = \sum_{i=1}^d \mu_i f_i.$$

Après multiplication par une puissance convenable de a , on obtient dans $\hat{A} \{X_1, \dots, X_N\}$ une relation qu'on met sous la forme

$$(1) \quad ke = \sum_{i=1}^d \lambda_i f_i,$$

en retenant que l'idéal engendré dans $\hat{A} \{X_1, \dots, X_N\}$ par k et e contient une puissance de a soit a^{h_0} .

De plus $\hat{B} \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_a$ est défini par $(f_1, \dots, f_d, e)$ dans $\hat{A} \{X_1, \dots, X_N\} \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_a$.

Soit $\hat{\mathfrak{c}}$ l'idéal engendré dans $\hat{B}$ par les mineurs d'ordre d de la jacobienne $(\partial f_i / \partial X_j)_{i=1, \dots, d; j=1, \dots, N}$. Il existe un entier h_1 tel qu'on ait dans $\hat{\mathfrak{c}} \supset a^{h_1} \hat{B}$. Fixons un entier h supérieur à $h_0 + h_1$, et considérons au-dessus de $A[X_1, \dots, X_N]^\sim$, hensélisé J -adique de $A[X_1, \dots, X_N]$, l'algèbre R définie par

$$R = A[X_1, \dots, X_N]^\sim [F_1, \dots, F_d, E, K, \Lambda_1, \dots, \Lambda_d] / \sum_{i=1}^d \Lambda_i F_i - K E.$$

Soit ε la section

$$\text{Spec } \hat{A} \{X_1, \dots, X_N\} \rightarrow \text{Spec } R \otimes_{A[X_1, \dots, X_N]^\sim} A \{X_1, \dots, X_N\}$$

définie par (k, e, λ_i, f_i) . Elle se factorise au-dessus de l'ouvert

$$\text{Spec } \hat{A} \{X_1, \dots, X_N\} - V(a)$$

à travers un ouvert lisse puisqu'on a remarqué que l'idéal engendré par (k, e) contient une puissance de a . On peut donc approximer cette solution au-dessus de $A[X_1, \dots, X_N]^\sim$.

Soit n un entier supérieur à h , ε_0 une section approchée modulo $\mathcal{I}^n$ de ε définie par $(k_0, e_0, \lambda_{i_0}, f_{i_0})$ dans $A[X_1, \dots, X_N]^\sim$ et soit C_0 l'algèbre $A[X_1, \dots, X_N]/(f_{i_0}, e_0)$, $\hat{C}_0$ son complété formel. $\hat{C}_0$ est formellement lisse sur $\text{Spec } \hat{A}$ en dehors de $V(\mathcal{I})$. Il est clair en effet grâce aux congruences imposées, que les mineurs de la jacobienne $(\partial f_{i_0}/\partial X_j)$ engendrent une puissance de a et les équations (f_{i_0}) suffisent à engendrer l'idéal de définition de $\hat{C}_0$ au voisinage de $\text{Spec } C_0 - V(a)$ dans $\text{Spec } \hat{A} \setminus \{X\}$. C'est ce qu'assure l'équation

$$k_0 e_0 = \sum \lambda_{i_0} f_{i_0}.$$

D'après le lemme 1, il existe un couple (n_0, s) tel que pour $n > n_0$, il existe un automorphisme φ de $\hat{A} \setminus \{X_1, \dots, X_N\}$ congru à l'identité modulo $\mathcal{I}^{n-s}$ et induisant un isomorphisme de $\hat{C}_0$ sur $\hat{C} = \hat{A} \setminus \{X\}/(f_1, \dots, f_d, e)$.

On a

$$\varphi^{-1}((f_{i_0}, \dots, f_{d_0}, e)) = (f_{i_0}, \dots, f_{d_0}, e_0).$$

Soit $\bar{\mathcal{I}}_0$ l'image de $\mathcal{I}$ par φ^{-1} , $\bar{J}_0$ définit un quotient $\bar{B}_0$ de $\hat{A} \setminus \{X_1, \dots, X_N\}$ isomorphe à $\hat{B}$. De plus cet idéal coïncide avec l'idéal $(f_{i_0}, \dots, f_{d_0}, e_0)$ dans l'ouvert $\text{Spec } \hat{A} \setminus \{X\} - V(\mathcal{I})$. Il résulte alors de la proposition 2 de [4] qu'il existe un idéal J_0 de $A[X_1, \dots, X_N]^\sim$ coïncidant avec $(f_{i_0}, \dots, f_{d_0}, e_0)$ dans $\text{Spec } A[X_1, \dots, X_N]^\sim - V(\mathcal{I})$ et engendrant $\bar{J}_0$ dans $\hat{A} \setminus \{X_1, \dots, X_N\}$. Le complété formel du quotient B_0 de $A[X_1, \dots, X_N]^\sim$ par J_0 est isomorphe à $\hat{B}$.

D'autre part on peut trouver un quotient B d'un voisinage étale $\mathcal{U}$ de $\mathcal{I}$ dans $A[X_1, \dots, X_N]$ tel que

$$B \otimes_{\mathcal{U}} A[X_1, \dots, X_N]^\sim \quad \text{soit} \quad B_0.$$

Cette A -algèbre B remplit les conditions requises et ceci démontre le lemme 7.

Fin de la démonstration du théorème 7. — On reprend maintenant le cas général, la fin de la démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 6.

Soient

$$\hat{B} = \hat{A} \setminus \{X_1, \dots, X_N\}/J, \quad J = (f_1, \dots, f_m) \quad \text{et} \quad A \setminus \{X\}^q \xrightarrow{L} A \setminus \{X\}^m \rightarrow J \rightarrow 0$$

une présentation de J . Et considérons $\hat{C}$ complété formel de l'algèbre symétrique du faisceau conormal J/J^2 sur $\hat{B}$.

$\hat{C}$ vérifie les conditions d'applications du lemme 7 si on le considère comme plongé dans une algèbre de séries formelles restreintes à $2N + m$ variables sur $\hat{A}$.

(On étend sans difficulté le lemme 4 du théorème 2 *bis* au cas formel).

Soit donc C_0 une algébrisation de $\hat{C}$ donnée par le lemme 7. On a le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Spec } C_0 & \xleftarrow{\psi} & \text{Spec } \hat{C} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & \swarrow \varepsilon & \searrow \\
 \text{Spec } A & \xleftarrow{\quad} & \text{Spec } \hat{A} & & \text{Spec } \hat{B}
 \end{array}$$

où ε est la section unité et où ψ définit un isomorphisme de C_0 sur $\hat{C}$ qui permet d'identifier ces deux algèbres dans la suite.

Soit M le $\hat{C}$ -module $f^*(J/J^2)$ localement libre en dehors de $V(JC)$.

Pour tout n on peut trouver, quitte à remplacer C_0 par un voisinage étale de $V(JC_0)$, un C_0 -module M_0 dont le complété $M_0 \otimes_{C_0} \hat{C}$ est isomorphe à M et muni d'une présentation

$$C_0^q \xrightarrow{L_0} C_0^m \rightarrow M_0 \rightarrow 0.$$

vérifiant $L_0 \equiv L(J^n)$ dans $\hat{C}$.

Supposons n fixé (on le précisera dans la suite) et M_0 ainsi choisi.

On construit alors D_0 algèbre symétrique de M_0 sur C_0 :

$$D_0 = C_0[Z_1, \dots, Z_m] / \sum C_{0ij} Z_j.$$

Son complété $\hat{D}_0$ est $\hat{C}$ -isomorphe au produit $\hat{C} \otimes_{\hat{B}} \hat{C}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, quitte à remplacer C_0 par un voisinage étale, on peut approximer modulo J^p la section diagonale de $\hat{C} \otimes_{\hat{B}} \hat{C}$ en une section

$$\delta : \text{Spec } C_0 \rightarrow \text{Spec } D_0$$

(grâce au théorème 2 *bis*).

L'idéal engendré dans C_0 par $\delta^*(Z_1, \dots, Z_m)$ permet de définir un quotient B' de C_0 .

Son complété formel $\hat{B}'$ peut alors être identifié à un sous schéma fermé de $\hat{C}$ défini par des équations congrues aux équations de définition de $\hat{B}$ dans $\hat{C}$, $(Y_1, \dots, Y_m)$, modulo $J^{\sup(n, p)}$ et liées par des relations définies par L_0 donc congrues aux relations entre les Y_i modulo (J^n) .

Il résulte alors du lemme 6 que pour n et p suffisamment grands le complété formel $B'^\wedge$ de B' est isomorphe à $\hat{B}$ ce qui termine la démonstration.

Remarque. — On peut penser que le théorème 7 est encore vrai lorsqu'on ne suppose plus $\mathcal{J}$ monogène. Une récurrence comparable à celle qu'on a employée précédemment permettrait probablement de l'étendre.

Remarque 1. — Certains de ces résultats en particulier les théorèmes 3 et 6 sont à rapprocher de ceux d'Hironaka [5].

Remarque 2. — Où l'on élimine quelques hypothèses noethériennes :

(a) Considérons d'abord le lemme 1 de I.

L'hypothèse A noethérien sert seulement lorsqu'on utilise Artin-Rees pour définir un entier k tel que (avec les notations du lemme) : $A \cap (t^k) = (0)$.

Le résultat s'étend donc sans changement si au lieu de supposer A noethérien, on suppose seulement l'existence d'un tel entier. En dehors du cas trivial où l'anneau A n'a pas de section à support dans $V(t)$ cela se produit si l'on suppose par exemple A plat sur un anneau noethérien A_0 , et t image d'un élément t_0 de A_0 .

(b) Des généralisations du même type s'appliquent au théorème 2 bis.

Prenons pour $(A, \mathcal{J})$ un couple hensélien non nécessairement noethérien mais supposons l'une ou l'autre des hypothèses suivantes satisfaites

(i) $\mathcal{J}$ est engendré par un élément a dont une puissance fixe annule tout élément de A à support dans $V(a)$.

(ii) A est plat sur un anneau noethérien A_0 et il existe un idéal $\mathcal{J}_0$ de A_0 tel que $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 A$.

On suppose toujours de plus que B est une A-algèbre de présentation finie. Alors le théorème 2 bis reste valide et la démonstration s'étend sans modification.

Dans les lemmes 2 et 3 l'hypothèse A noethérien n'intervient pas. Dans le lemme 3 l'algèbre C introduite n'est plus nécessairement de présentation finie mais seulement de type fini. Cependant elle est localement de présentation finie au-dessus de l'ouvert $\text{Spec } A - V(\mathcal{J})$ que l'on considère.

Le lemme 4 et la fin de la démonstration du théorème 2 bis s'étendent alors pour les raisons invoquées dans la remarque (a) ci-dessus.

Sous ces hypothèses on peut dire brièvement que la plupart des résultats d'approximation de structures formelles par des structures henséliennes restent valides. Dans le cas (ii), elles sont par contre insuffisantes pour obtenir un résultat de descente puisqu'on ne dispose pas en général du théorème 1.

Prenons l'exemple du théorème 3. Sous les hypothèses (i) ou (ii) on peut étant donné un $\hat{A}$ -module de présentation finie $\bar{M}$, localement libre de rang r au-dessus de $\text{Spec } \hat{A} - V(\mathcal{J} \hat{A})$ trouver un A -module M localement libre de rang r au-dessus de $\text{Spec } A - V(\bar{\mathcal{J}})$ et muni d'une présentation congrue à celle de $\bar{M}$ modulo une puissance arbitraire de $\mathcal{J}$.

Mais nous ne savons assurer que son complété soit isomorphe à $\bar{M}$ que si nous pouvons appliquer à $\hat{A}$ le théorème 1, par exemple dans le cas (i) ou lorsque $\hat{A}$ est noethérien puisqu'on sait alors construire les automorphismes u et v du lemme 5.

(c) Considérons maintenant le cas suivant. Désignons par A_0 un anneau de valuation de hauteur 1, par $\mathcal{J}$ son idéal maximal et soit a un élément de valuation strictement positive. Soient encore A le hensélisé a -adique d'une A_0 -algèbre plate de présentation finie et $\hat{A}$ son complété (complet signifie toujours séparé complet et A est séparé). Il résulte des remarques précédentes que les théorèmes 1 et 2 peuvent être appliqués à A et $\hat{A}$ (en remplaçant toutefois les hypothèses de type fini par de présentation finie).

Les démonstrations des théorèmes 3 et 4 s'adaptent aussi à cette situation sans modification importante.

On peut de même approximer l'algèbre $\bar{C}$ du théorème 5 par une A -algèbre C , finie étale au-dessus de $\text{Spec } A - V(aA)$ et si l'on suppose $\bar{C}$ séparée une approximation suffisante fournira une A -algèbre dont le complété est isomorphe à $\bar{C}$.

Nous nous intéressons maintenant au théorème 7 (dont le théorème 6 est un cas particulier).

Nous supposons que l'algèbre $\hat{B}$, séparée complète est de présentation finie sur $\hat{A}$,

$$\hat{B} = \hat{A} \{ X_1, \dots, X_N \} / \bar{\mathcal{J}}, \quad \bar{\mathcal{J}} = (f_1, \dots, f_m).$$

Et nous supposons que $\mathcal{J}$ est lui-même un $A \{ X \}$ module de présentation finie.

Pour pouvoir calquer la démonstration du théorème 7 et trouver une A -algèbre B' dont le complété formel est isomorphe à $\hat{B}$ il suffit de vérifier que le morphisme σ construit dans le lemme 6 est encore un isomorphisme malgré l'absence d'hypothèses noethériennes.

Il suffit pour cela qu'on puisse encore écrire une formule d'Artin-Rees :

$$\mathcal{J} \cap (a^n) \subset a^{n-r} \mathcal{J} \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Mais soit I un idéal d'un anneau de séries formelles $A_0 \{T_1, \dots, T_q\}$. Son saturé $\bar{I}'$, est par définition le plus petit idéal de $A_0 \{T\}$ contenant I , et tel que le quotient $A_0 \{T\} / \bar{I}$ soit A_0 -plat.

On a

$$\bar{I} = \{x \in A_0 \{T\} \text{ tel que } \exists p \in \mathbf{N} / a^p x \in I\}.$$

Alors $\bar{I}$ est de type fini.

Ceci implique qu'il existe un entier n_0 tel que

$$\forall x \in \bar{I}, \quad a^{n_0} x \in I.$$

On a donc

$$\forall n > n_0, \quad I \cap (a^n) \subset a^{n-n_0} I$$

et ceci termine la démonstration.

IV. — Déformations de singularités isolées

1. Soient A un anneau local noethérien complet, k son corps résiduel, X_0 un k -schéma affine de type fini et équidimensionnel présentant une (ou plusieurs) singularités isolées.

C désigne la catégorie des A algèbres artiniennes ayant pour corps résiduel k .

Suivant Schlessinger [9], pour tout $A \in C$ on appelle *déformation* de X_0 sur A un couple formé d'un schéma X de type fini, plat sur A et d'un isomorphisme $X \otimes_A k \xrightarrow{\sim} X_0$.

Deux telles déformations X et X' sont dites *équivalentes* s'il existe un A -isomorphisme $X \xrightarrow{\sim} X'$ induisant l'identité sur X_0 .

On définit alors un foncteur $F : C \rightarrow \text{Ens}$, associant à chaque objet A de C l'ensemble des classes d'équivalence de déformations de X_0 sur A .

On peut étendre F à la catégorie $\hat{C}$ des A -algèbres locales complètes $\hat{A}$ telles que $\hat{A}/M^n \in C$ pour tout n (M désigne l'idéal maximal de $\hat{A}$) en posant

$$\hat{F}(\hat{A}) = \varprojlim_n F(\hat{A}/M^n).$$

Un élément de $\hat{F}(\hat{A})$ peut alors être un représenté par un couple formé d'un schéma formel de type fini plat sur A , et d'un isomorphisme de sa fibre fermée avec X_0 .

On dira d'un élément x de $\hat{F}(\hat{A})$ qu'il est *effectif* s'il peut être représenté par un $\hat{A}$ -schéma algébrisable c'est-à-dire s'il existe un $\hat{A}$ -schéma de type fini dont le compété formel définisse x .

On dit d'autre part qu'il existe un représentant *algébrique* d'un couple $(\hat{A}, x)$ s'il existe une Λ -algèbre locale essentiellement de type fini A , dont le complété est isomorphe à $\hat{A}$, et un schéma de type fini X sur A dont le complété formel définit $x \in \hat{F}(\hat{A})$.

Un couple $(\bar{S}, x), \bar{S} \in \hat{C}, x \in \hat{F}(\bar{S})$ est dit *formel versel* s'il possède la propriété suivante :

(1) Soit $A' \xrightarrow{j} A$ une surjection dans C et $y' \in F(A')$ induisant y sur A . Alors pour tout morphisme

$$u: \bar{S} \rightarrow A \quad \text{tel que} \quad F(u)(x) = y,$$

il existe

$$\bar{u}: \bar{S} \rightarrow A' \quad \text{tel que} \quad F(\bar{u})(x) = y' \quad \text{et} \quad j \circ \bar{u} = u.$$

On dit qu'il est *semi-universel* lorsqu'il a la propriété (1) et la propriété :

(2) Le relèvement $\bar{u}$ défini dans (1) est unique lorsqu'on prend $A = k$ et $A' = k[\varepsilon]$, algèbre des nombres duaux.

On sait d'après Schlessinger [9] qu'il existe une déformation formelle semi-universelle de X_0 (unique à isomorphisme non unique près).

Remarque. — Ce que nous appelons déformation semi-universelle est appelé verselle par Schlessinger qui ne considère pas de déformations verselles au sens où nous l'entendons ici.

2. UNE EXTENSION DES PROPRIÉTÉS VERSELLES. — Soit $\bar{S} \in \hat{C}$, X une déformation formelle de X_0 sur $\bar{S}$ telle que le couple $(\bar{S}, X)$ représente la déformation semi-universelle de X_0 .

Soient $A' \xrightarrow{j} A$ une surjection dans C et Y' une déformation de ${}_0X$ sur A' induisant $Y = Y' \otimes_{A'} A$ sur A .

Supposons donné un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\theta} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } \bar{S} & \xleftarrow{\sigma} & \text{Spec } A \end{array}$$

tel que θ définisse un isomorphisme $Y \rightarrow \sigma^*(X)$. Alors on peut trouver un diagramme commutatif.

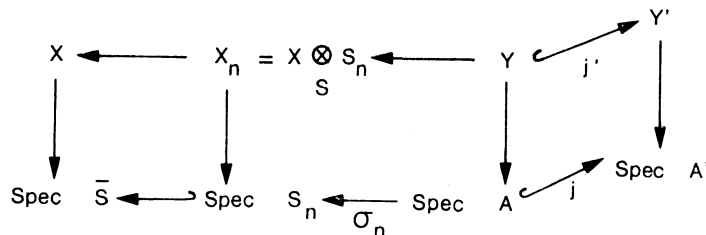
$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\theta'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } \bar{S} & \xleftarrow{\sigma'} & \text{Spec } A' \end{array}$$

tel que σ' relève σ , θ' relève θ , et définisse un isomorphisme des déformations $Y' \rightarrow \sigma'^*(X)$.

Rim ([cf. 8]) démontre ce résultat. C'est d'ailleurs cette propriété [à la place de (1)] qu'il utilise pour définir des éléments versels.

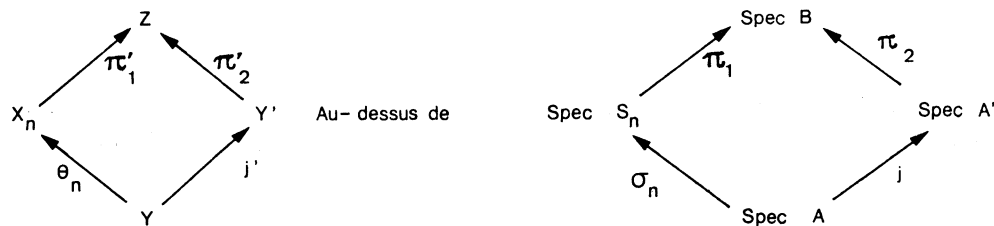
Démonstration. — On peut supposer que le noyau de la surjection $A' \rightarrow A \rightarrow 0$ est un idéal de carré nul de A' , donc un k -espace vectoriel et qu'il est de dimension 1 sur k .

Posons $S_n = \bar{S}/M^n$ où M est l'idéal maximal de $\bar{S}$ et considérons le diagramme commutatif



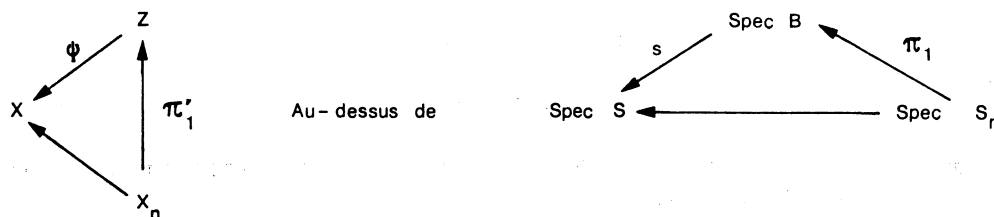
(n est choisi de façon à ce que σ se factorise à travers le quotient artien S_n de $\bar{S}$).

Soit $B = S_n \times_A A'$ et soit Z la déformation $X_n \cup_Y Y'$ sur B de sorte qu'on a les diagrammes commutatifs suivants (cf. [9]) :



dans lesquels $\pi_1, \pi_2, \pi'_1, \pi'_2$ sont les flèches canoniques; π'_1 (resp. π'_2) définit un isomorphisme $X_n \rightarrow \pi'_1(Z)$ [resp. $Y' \rightarrow \pi'_2(Z)$].

Il suffit pour établir le résultat de montrer qu'on peut trouver un diagramme commutatif



tel que ψ définisse un isomorphisme de Z sur $S^*(X)$.

Il suffira alors de prendre

$$\sigma' = s \circ \pi_2 \quad \text{et} \quad \theta' = \psi \circ \pi'_2.$$

On sait d'après la définition de S qu'on peut trouver

$$t: \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} S,$$

relevant le morphisme canonique

$$\operatorname{Spec} S_n \rightarrow \operatorname{Spec} S,$$

et tel que $t^*(X)$ soit isomorphe à Z .

Soit φ un isomorphisme

$$Z \xrightarrow{\varphi} t^*(X)$$

et t' la flèche canonique

$$t': t^*(X) \rightarrow X.$$

Considérons alors les sommes amalgamées

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ \alpha'_1 \nearrow & & \nwarrow \alpha'_2 \\ t^*(X) & & Z \\ \pi''_1 \nwarrow & & \nearrow \pi'_1 \\ & X_n & \end{array} \quad \text{Au-dessus de} \quad \begin{array}{ccc} & \operatorname{Spec} B \times_{S_n} B & \\ \alpha_1 \nearrow & & \nwarrow \alpha_2 \\ \operatorname{Spec} B & & \operatorname{Spec} B \\ \pi_1 \nwarrow & & \nearrow \pi_1 \\ & \operatorname{Spec} S_n & \end{array}$$

où t est la déformation sur $B \times_{S_n} B : t^*(X) \cup_{X_n} Z$, où $\alpha'_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha'_2$ désignent les flèches canoniques et où π''_1 est la flèche canonique

$$\pi_1^*(t^*(X)) = X_n \rightarrow t^*(X).$$

Désignons encore par π_1 le morphisme canonique d'anneaux

$$B = S_n \times_A A' \rightarrow S_n.$$

Son noyau J est un k -espace vectoriel de dimension 1 (comme le noyau de la surjection $A' \rightarrow A$).

Choisissons un isomorphisme $J \simeq k$. On définit alors un isomorphisme

$$B \times_{S_n} B \rightarrow B \times_k k[\varepsilon]$$

par

$$(x, y) \rightarrow [x, x_0 + \varepsilon(y - x)],$$

où x_0 est la réduction de x dans k et où $y - x$ qui appartient à J est identifié à un élément de k .

Grâce à cet isomorphisme, T définit une déformation T' sur $B \times_k k[\varepsilon]$ qui induit par projection $t^*(X)$ sur B et une déformation T'' sur $k[\varepsilon]$.

D'après la définition de $\bar{S}$ on peut trouver un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{b'} & T'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } \bar{S} & \xleftarrow{b} & \text{Spec } k[\varepsilon] \end{array}$$

où b' induit un isomorphisme $T'' \rightarrow b^*(X)$, et donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{t' \cup b'} & t^*(X) \cup_{X_0} T'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } \bar{S} & \xleftarrow{t' \cup b} & \text{Spec } (B \times_k k[\varepsilon]) \end{array}$$

De plus $t^*(X) \cup_{X_0} T''$ est isomorphe à T' car on a une bijection

$$F(B \times_k k[\varepsilon]) \xrightarrow{\sim} F(B) \times F(k[\varepsilon]) \quad (\text{cf. [9]}).$$

Ceci est donc équivalent à la donnée de morphismes :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B \times_{S_n} B & \xrightarrow{s'} & \text{Spec } \bar{S}, \\ T & \xrightarrow{\psi'} & X, \end{array}$$

tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\psi'} & T \\ \swarrow t' & & \nearrow \alpha'_1 \\ t^*(X) & & \end{array} \quad \text{Au-dessus de} \quad \begin{array}{ccc} \text{Spec } \bar{S} & \xleftarrow{s'} & \text{Spec } B \times_{S_n} B \\ \swarrow t & & \nearrow \alpha_1 \\ \text{Spec } B & & \end{array}$$

soient commutatifs.

Il suffit alors de prendre pour s , $s' \circ \alpha_2$ et pour ψ , $\psi' \circ \alpha'_2$ pour définir des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \swarrow \psi & \uparrow \pi'_1 & \\ X & \text{Spec } X_n & \end{array} \quad \text{Au-dessus de} \quad \begin{array}{ccc} & \text{Spec } T & \\ \swarrow s & \uparrow \pi_1 & \\ \text{Spec } S & \text{Spec } S_n & \end{array}$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

Il admet comme corollaire immédiat :

COROLLAIRE 1. — Soient $\hat{A} \in \hat{C}$, et $\hat{Y}$ une déformation formelle de X_0 sur $\hat{A}$.

Alors il existe un morphisme

$$\text{Spec } \hat{A} \xrightarrow{\sigma} \text{Spec } \bar{S}$$

et un $\hat{A}$ -isomorphisme des schémas formels Y et $\sigma^*(X)$.

On a même plus précisément le corollaire 2.

COROLLAIRE 2. — Soient $A' \xrightarrow{j} A$ une surjection dans $\hat{C}$, Y' un schéma formel sur A' définissant un élément de $\hat{F}(A')$ et Y sa réduction au-dessus de A . Soient de plus un morphisme $\sigma : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } \bar{S}$ et un A -isomorphisme $\theta : Y \xrightarrow{\sim} \sigma^*(X)$.

Alors il existe un morphisme $\sigma' : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } \bar{S}$ relevant σ , et un A' -isomorphisme θ' relevant θ de Y' sur $\sigma'^*(X)$.

Démonstration. — On ne connaît pour l'instant ce résultat que si l'on suppose en outre que le noyau de j contient une puissance de l'idéal maximal M de A' .

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons alors

$$A'_n = A'/M^n, \quad A_n = A/M^n.$$

On notera de la même façon, j_n , σ_n , θ_n la réduction des morphismes j , σ , θ .

Pour un n donné on sait qu'on peut trouver un morphisme

$$\sigma'_n : \text{Spec } A'_n \rightarrow \text{Spec } \bar{S},$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } A'_n & \xrightarrow{\sigma'_n} & \text{Spec } \bar{S} \\ \uparrow j_n & \nearrow \sigma_n & \\ \text{Spec } A_n & & \end{array}$$

soit commutatif, et un isomorphisme

$$\theta'_n : Y'_n \xrightarrow{\sim} \sigma'^n_*(X) \text{ relevant } \theta_n.$$

Considérons maintenant

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } A_{n+1} & \xleftarrow{\quad} & \text{Spec } A_n \\ \downarrow & & \downarrow j_n \\ \text{Spec } B = \text{Spec } A_{n+1} \times_{A_n} A'_n & \xleftarrow{\quad} & \text{Spec } A'_n \end{array}$$

Les deux flèches σ'_n et σ_{n+1} induisent

$$\sigma_n : \text{Spec } A_n \rightarrow \text{Spec } S.$$

On a donc une factorisation

$$V : \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} \bar{S}.$$

de ces deux flèches.

On a de la même façon un morphisme canonique

$$\varphi : \operatorname{Spec} B \hookrightarrow \operatorname{Spec} A'_{n+1}.$$

Comme on a pris soin d'assurer que θ'_n relève θ_n les deux déformations $v^*(X)$ et $\varphi^*(Y'_{n+1})$ au-dessus de B , sont isomorphes et plus précisément il existe un isomorphisme

$$\gamma : \varphi^*(Y'_{n+1}) \rightarrow v^*(X),$$

qui induit θ_{n+1} et θ'_n .

φ étant une immersion fermée on peut trouver (grâce aux propriétés verselles de S) une flèche

$$\sigma'_{n+1} : \operatorname{Spec} A'_{n+1} \rightarrow \operatorname{Spec} \bar{S},$$

relevant v et telle qu'il existe un isomorphisme

$$\theta'_{n+1} : Y'_{n+1} \rightarrow \sigma'^*_{n+1}(X),$$

induisant γ au-dessus de B .

On fabrique ainsi un système cohérent de morphismes

$$\sigma'_n : \operatorname{Spec} A'_n \rightarrow \operatorname{Spec} \bar{S},$$

induisant

$$\sigma_n : \operatorname{Spec} A_n \rightarrow \operatorname{Spec} \bar{S}$$

et un système cohérent d'isomorphismes θ'_n relevant θ_n . Par passage à la limite on définit donc

$$\sigma' : \operatorname{Spec} A' \rightarrow \operatorname{Spec} \bar{S} \text{ relevant } \sigma$$

et un A' -isomorphisme

$$\theta' : Y' \xrightarrow{\sim} \sigma'^*(X) \text{ relevant } \theta.$$

THÉORÈME 7. — *Il existe un représentant effectif de la déformation semi-universelle de X_0 .*

Démonstration. — Soient $\bar{S} \in \hat{C}$ et $\bar{X}$ un schéma formel sur $\bar{S}$ tel que $(\bar{S}, \bar{X})$ soit une déformation formelle semi-universelle de X_0 .

On va approximer $\bar{X}$ en un schéma algébrique sur $\bar{S}$. Considérons le morphisme

$$\bar{X} \rightarrow \operatorname{Spec} \bar{S}.$$

Soit d la dimension de X_0 (supposé équidimensionnel) et soit $\bar{Z}_X$ le lieu singulier relatif de $\bar{X}$. Il est fini sur $\bar{S}$.

En relevant une présentation de Noether convenable de X_0 on peut donc trouver un morphisme fini

$$\bar{X} \rightarrow \operatorname{Spec} \bar{S} \{ Y_1, \dots, Y_d \} = \operatorname{Spec} \bar{S} \{ Y \},$$

tel que l'image réciproque du fermé défini par $(Y) = (Y_1, \dots, Y_d)$ contienne $\bar{Z}_X$ ($\bar{S} \{ Y_1, \dots, Y_d \}$ désigne l'anneau des séries formelles restreintes à d variables sur $\bar{S}$).

Soit $\bar{S}[Y]^\sim = \bar{S}[Y_1, \dots, Y_d]^\sim$ le hensélisé pour la topologie $\underline{Y}$.M-adique de l'anneau de polynômes $\bar{S}[Y_1, \dots, Y_d]$ (M désigne l'idéal maximal de $\bar{S}$ et $\underline{Y}$ l'idéal engendré par les Y_i). Son complété pour cette topologie est aussi son complété M-adique $\bar{S}\{Y\}$.

Au-dessus de l'ouvert $\operatorname{Spec} \bar{S}\{Y\} - V(Y.M)$ le schéma fini $\bar{X}$ est localement intersection complète relative.

Il résulte donc du théorème 4 qu'on peut l'approximer autant que l'on veut par un schéma fini $\tilde{X}$ sur $\bar{S}[Y]^\sim$, localement intersection complète relative en dehors de $\operatorname{Spec} \bar{S}[Y]^\sim - V(Y.M)$ de telle façon que les faisceaux de $\bar{S}\{Y\}$ -modules $\mathcal{O}_{\tilde{X}} \otimes_{\bar{S}[Y]^\sim} \bar{S}\{Y\}$ et $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ soient isomorphes.

Le faisceau $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ sera en particulier plat sur $\bar{S}$ puisqu'il l'est après extension fidèlement plate.

Supposons (avec n choisi supérieur ou égal à 2), $X^\sim$ congru à $\bar{X}$ modulo M^n .

Par passage à la limite inductive on peut trouver un S -schéma plat de type fini X , fini sur un voisinage étale de $V(Y.M)$ dans $\bar{S}[Y]$, et définissant $X^\sim$ au-dessus de $\bar{S}[Y]^\sim$.

Il résulte de la définition de $(\bar{S}, \bar{X})$ que l'on peut trouver un morphisme

$$\varphi: \operatorname{Spec} \bar{S} \rightarrow \operatorname{Spec} \bar{S},$$

relevant l'identité modulo M^n , donc un automorphisme de $\bar{S}$, tel que pour tout p on ait

$$X_p = X \otimes_{\bar{S}} \bar{S}/M^p \simeq \varphi^*(\bar{X})_p = \varphi^*(\bar{X}) \otimes_{\bar{S}} \bar{S}/M^p$$

et ceci implique que $(\bar{S}, X)$ est une déformation formelle semi-universelle de X_0 .

4. EXISTENCE DE DÉFORMATION HENSÉLIENNES VERSELLES. — On prend maintenant pour Λ une algèbre locale hensélienne essentiellement de type fini sur un corps ou un anneau de valuation discrète excellent (c'est-

à-dire vérifiant les conditions d'application du théorème d'approximation de M. Artin [1]) et ayant pour corps résiduel k . (Par hensélien essentiellement de type fini on entend hensélisé d'une algèbre essentiellement de type fini.)

Soit $\tilde{C}$ la catégorie des A -algèbres locales henséliennes essentiellement de type fini ayant pour corps résiduel k .

On appelle *déformation* de X_0 sur $A \in \tilde{C}$ un couple formé d'un A -schéma plat de type fini X et d'un isomorphisme de $X \otimes_A k$ avec X_0 .

On dit maintenant que deux A -déformations X et X' sont *équivalentes* s'il existe un A -isomorphisme entre les hensélisés $X^\sim$ et $X'^\sim$ de X et X' le long de leur fibre fermée induisant l'identité sur X_0 .

On étend ainsi à $\tilde{C}$ le foncteur F précédemment défini sur la sous-catégorie C de $\tilde{C}$ en associant à chaque élément A de $\tilde{C}$ l'ensemble des classes de déformations de X_0 sur A .

On dit d'un couple (S, x) , $S \in \tilde{C}$, $x \in F(S)$ qu'il est *hensélien versel* (resp. semi-universel) s'il possède la propriété (1) [resp. (1) et (2)] de 1 lorsqu'on suppose maintenant dans (1) que $A' \rightarrow A$ est une surjection dans $\tilde{C}$.

THÉORÈME. — *Il existe un couple (S, x) $S \in \tilde{C}$, $x \in F(S)$ dont le complété est isomorphe à une déformation formelle semi-universelle de X_0 .*

Mike Artin a en effet démontré dans [2] que ce théorème est une conséquence de l'existence d'un représentant effectif de la déformation formelle semi-universelle.

On se propose maintenant d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME 8. — *Soit (S, x) un couple, $S \in \tilde{C}$, $x \in F(S)$, représentant la déformation formelle semi-universelle de X_0 . Alors c'est un couple hensélien versel.*

Il est clair qu'il suffit de démontrer qu'il a la propriété (1).

Soient donc $A' \xrightarrow{j} A \rightarrow 0$ une surjection dans $\tilde{C}$, Y' un A' schéma de type fini, définissant une A' -déformation de X_0 et induisant Y sur A .

Soient

$$\sigma: \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } S,$$

un morphisme et

$$\tilde{\eta}: \sigma^*(X)^\sim \xrightarrow{\sim} Y^\sim,$$

un A -isomorphisme des hensélisés de $\sigma^*(X)$ et Y le long de leur fibre fermée.

Quitte à remplacer Y' par un voisinage étale de sa fibre fermée on peut supposer que θ provient d'un isomorphisme

$$\theta : \sigma^*(X)_{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} Y,$$

où $\sigma^*(X)_{\text{ét}}$ désigne un voisinage étale convenable de $\sigma^*(X)$.

Soit $\bar{\sigma}$ la flèche déduite de σ ,

$$\bar{\sigma} : \text{Spec } \hat{S} \rightarrow \text{Spec } \hat{A}$$

et $\bar{\theta}$ le morphisme déduit de θ :

$$\bar{\sigma}^*(X)_{\text{ét}} = \sigma^*(X)_{\text{ét}} \otimes_{\hat{A}} \hat{A} \xrightarrow{\bar{\theta}} Y \otimes_{\hat{A}} \hat{A}.$$

Soit I le noyau de la surjection $A' \rightarrow A \rightarrow 0$.

Et posons

$$A = A_0 = A'/I, \quad A_n = A'/I^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

On pose de même

$$Y_n = Y' \otimes_{A'} A_n.$$

On construit d'abord cran par cran un morphisme

$$\hat{\sigma}' : \text{Spec } \hat{A}' \rightarrow \text{Spec } \hat{S},$$

relevant $\bar{\sigma}$ et un $\hat{A}'$ isomorphisme $\hat{\theta}'$ des complétés I -adiques formels de

$$\hat{\sigma}'^*(X)_{\text{ét}} \quad \text{et} \quad Y' \otimes_{A'} \hat{A}'.$$

On terminera alors la démonstration par une technique d'approximation, utilisant le théorème de M. Artin [1] [la signification de la notation $\hat{\sigma}'^*(X)_{\text{ét}}$ un peu abusive ici sera éclaircie dans la suite]. Supposons donc trouvé pour $n \geq 0$:

$$\hat{\sigma}_n : \text{Spec } \hat{A}_n \rightarrow \text{Spec } \hat{S} \quad (\hat{\sigma}_0 = \bar{\sigma})$$

et un $\hat{A}_n$ isomorphisme algébrique

$$\bar{\theta}_n : \hat{\sigma}_n^*(X)_{\text{ét}} \rightarrow Y_n \otimes \hat{A}'$$

relevant $\bar{\theta} = \bar{\theta}_0$ et où $\sigma_n^*(X)_{\text{ét}}$ désigne un voisinage étale de la fibre fermée de $\sigma_n^*(X)$ relevant $\bar{\sigma}^*(X)_{\text{ét}}$.

Grâce aux propriétés formelles verselles de $\hat{S}$, et en particulier au corollaire 2 du paragraphe 2 ci-dessus, on peut trouver

$$\hat{\sigma}_{n+1} : \text{Spec } \hat{A}_{n+1} \rightarrow \text{Spec } \hat{S}$$

relevant $\hat{\sigma}_n$ et un A_{n+1} isomorphisme formel

$$\hat{\theta}_{n+1} : \hat{\sigma}_{n+1}^*(X)^\wedge \rightarrow Y_{n+1}^\wedge,$$

tel que $\hat{\theta}_{n+1}$ et $\bar{\theta}_n$ induisent le même isomorphisme formel des complétés le long de leur fibre fermée de $\hat{\sigma}_n^*(X)$ et Y_n .

Désignons par $\hat{\sigma}_{n+1}(X)_{\text{ét}}$ un voisinage étale de la fibre fermée de $\hat{\sigma}_{n+1}(X)$ relevant $\hat{\sigma}_n(X)_{\text{ét}}$. Il résulte alors de la proposition suivante (Illusie) qu'on peut approximer $\hat{\theta}_{n+1}$ par un $\hat{A}_{n+1}$ -isomorphisme algébrique

$$\bar{\theta}_{n+1} : \hat{\sigma}_{n+1}(X)_{\text{ét}} \rightarrow Y_{n+1} \otimes_{\hat{A}'} \hat{A}'$$

relevant $\bar{\theta}_n$.

LEMME (Illusie). — Soient $S' = \text{Spec } A'$ le spectre d'un anneau local complet, $\mathfrak{J}$ son idéal maximal; $S = \text{Spec } A$ un fermé de S' défini par un idéal de carré nul I , X', Y' deux schémas affines plats de type fini sur S' dont le lieu singulier relatif est fini sur S' , $\hat{X}', \hat{Y}'$ leurs complétés $\mathfrak{J}$ -adiques formels, X, Y leurs réductions au-dessus de S , $\hat{X}, \hat{Y}$ les complétés $\mathfrak{J}$ -adiques de X, Y .

Soit f un S -morphisme $X \rightarrow Y$, $\hat{f}$ la flèche obtenue par complétion $\hat{X} \rightarrow \hat{Y}$. Alors il existe un S' -morphisme $f' : X' \rightarrow Y'$ relevant f si et seulement si $\hat{f}$ se relève en un morphisme de schémas formels $\hat{f}' : \hat{X}' \rightarrow \hat{Y}'$.

Démonstration. — Soit $L_{Y/S}$ le complexe cotangent de Y sur S .

L'obstruction au relèvement de f en un f' est une classe $O(f)$ dans $\text{Ext}^1(f^* L_{Y/S}, I_X)$ où I_X est l'image réciproque du S -module I sur X .

Désignons par S_n , (resp. X_n, Y_n, f_n, I_n) les tronqués à l'ordre n de S (resp. X, Y, f, I).

Le complexe $L_{Y/S}$ induit le complexe cotangent L_{Y_n/S_n} . Et l'obstruction au relèvement de f_n en un

$$f'_n : X'_n \rightarrow Y'_n$$

est une classe $O(f_n)$ dans $\text{Ext}^1(f_n^* L_{Y_n/S_n}, I_{X_n})$ qui n'est autre que l'image de $O(f)$ par le morphisme canonique

$$\text{Ext}^1(f^* L_{Y/S}, I_X) \rightarrow \text{Ext}^1(f_n^* L_{Y_n/S_n}, I_{X_n}).$$

L'existence de $\hat{f}'$ assure $O(f_n) = 0$, $\forall n$. On veut en déduire $O(f) = 0$.

Le complexe $f^* L_{Y/S}$ est à cohomologie cohérente donc équivalente à un complexe L de modules libres de type fini sur X et l'on a

$$\underline{\text{RHom}}(f^* L_{Y/S}, I_X) = \text{Hom}^*(L, I_X) = L^* \otimes I_X.$$

Et

$$\underline{\text{RHom}}(f_n^* L_{Y_n/S_n}, I_{X_n}) = \text{Hom}^*(L_n, I_{X_n}) = L_n^* \otimes I_{X_n},$$

où L_n désigne le tronqué à l'ordre n de L .

Puisqu'on a supposé les lieux singuliers relatifs de X et Y finis sur S

$$\mathrm{Ext}^1(f^* L_{Y/S}, I_X) = H^1(L^v \otimes I_X)$$

est un S module de type fini et

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1(f^* L_{Y/S}, I_X) &= \varprojlim H^1(L^v \otimes I_X)_n \\ &= \varprojlim H^1(L_n^v \otimes I_{X_n}) \quad (\text{Artin-Rees}) \\ &= \varprojlim \mathrm{Ext}^1(f_n^* L_{X_n/Y_n}, I_{X_n}) \end{aligned}$$

ce qui établit le lemme.

Par passage à la limite sur n on obtient donc

$$\hat{\sigma}' : \mathrm{Spec} \hat{S} \rightarrow \mathrm{Spec} \hat{A}' \text{ relevant } \hat{\sigma}$$

et un $\hat{A}'$ -isomorphisme

$$\lim_{\xrightarrow{n}} \bar{\theta}_n : \lim_{\xrightarrow{n}} \sigma_n^*(X)_{\mathrm{\acute{e}t}} \rightarrow \lim_{\xrightarrow{n}} Y_n \otimes_A A'.$$

$\lim_{\xrightarrow{n}} \sigma_n^*(X)_{\mathrm{\acute{e}t}}$ est un voisinage étale de la fibre fermée du complété I -adique de $\hat{\sigma}^*(X)$ il est donc algébrisable, on note ce $\hat{A}'$ schéma algébrique $\hat{\sigma}'^*(X)_{\mathrm{\acute{e}t}}$. Il induit $\sigma^*(X)_{\mathrm{\acute{e}t}}$ modulo I . $\lim_{\xrightarrow{n}} \bar{\theta}_n$ est un $\hat{A}'$ -isomorphisme de schémas I -adiques formels.

Il résulte du lemme suivant qu'il s'approxime en un isomorphisme algébrique relevant $\bar{\theta}$ de voisinages étales de $V(I)$ dans $\sigma^*(X)_{\mathrm{\acute{e}t}}$ et $Y' \otimes_A \hat{A}'$.

LEMME. — Soient $A \in \hat{C}$, I un idéal de A , X et Y , deux déformations algébriques de X_0 sur A . On désigne par $\hat{X}_1$ (resp. $\hat{Y}_1$) le complété I -adique formel de X (resp. Y), par $\tilde{X}_1$ (resp. $\tilde{Y}_1$) le hensélisé I -adique X (resp. de Y). Soit

$$\hat{\theta} : \hat{X}_1 \xrightarrow{\sim} \hat{Y}_1$$

un A -isomorphisme formel.

Alors pour tout entier n , on peut trouver un A -isomorphisme $\tilde{\theta} :$

$$\tilde{\theta} : \tilde{X}_1 \xrightarrow{\sim} \tilde{Y}_1,$$

congru à $\hat{\theta}$ modulo I^n .

Démonstration. — Soient

$$\begin{aligned} \Gamma &= \hat{A}[X_1, \dots, X_N]/(f_1, \dots, f_m) & \text{tel que } X &= \mathrm{Spec} \Gamma, \\ \Lambda &= \hat{A}[Y_1, \dots, Y_p]/(g_1, \dots, g_q) & \text{tel que } Y &= \mathrm{Spec} \Lambda. \end{aligned}$$

Notons d la dimension des composantes irréductibles de X_0 et soit Δ_X (resp. Δ_Y) l'idéal de Γ (resp. Λ) engendré par les mineurs de rang $N - d$

(resp. $p - d$) de la matrice jacobienne $(\partial f_i / \partial X_j)$ [resp. $(\partial g_i / \partial Y_j)$]. Δ_X (resp. Δ_Y) définit le lieu singulier relatif Z_X (resp. Z_Y) de X (resp. de Y) sur $\hat{A}$.

On peut noter que Z_X (resp. Z_Y), étant fini sur A le complété I -adique de Γ (resp. de Λ) est aussi son complété $I \Delta_X$ -adique (resp. $I \Delta_Y$ -adique).

Soient $\tilde{X}_I$ (resp. $\tilde{Y}_I$) le hensélisé de X (resp. Y) le long du fermé défini par $I \Delta_X$ (resp. $I \Delta_Y$) (ou par I).

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \overset{x}{\times}_{\hat{A}} Y & \longleftarrow \hat{X}_I \overset{x}{\times}_A Y \\ \downarrow & & \downarrow \uparrow \text{Id} \times_{\hat{A}} \hat{\theta} \\ \tilde{X}_I & & \hat{X}_I \end{array}$$

Puisque $\hat{\theta}$ est un $\hat{A}$ isomorphisme on a en particulier

$$\hat{\theta}^*(Z_Y) = Z_X$$

de telle sorte que la section

$$\text{Id} \times_{\hat{A}} \hat{\theta}: \hat{X}_I \rightarrow \hat{X}_I \times_{\hat{A}} Y$$

se factorise, en dehors de $V(I \Delta_X)$, à travers l'ouvert de lissité de $\hat{X} \times_{\hat{A}} Y$ sur $\hat{X}$.

Il suffit alors d'utiliser le théorème 2 pour trouver pour tout n un morphisme

$$V: \tilde{X}_I \rightarrow \hat{X}_I \times_{\hat{A}} Y \text{ tel que } V \equiv (\text{Id} \times_{\hat{A}} \hat{\theta}), \quad \text{mod } (I \Delta_X)^n$$

et on en déduit un morphisme

$$\theta': X^\sim \rightarrow Y^\sim$$

congru à $\hat{\theta}$ modulo I^n .

Il reste à vérifier que pour n convenablement choisi θ' est un isomorphisme.

La flèche induite sur les complétés I -adiques est congrue à $\hat{\theta}$ modulo I^n . Prenons $n \geq 2$. On a donc une immersion fermée

$$X^\wedge \hookrightarrow Y^\wedge.$$

De plus $\hat{\theta}^{-1} \hat{\theta}'$ est un automorphisme de $\hat{X}$ puisque c'est un endomorphisme d'un schéma affine noethérien induisant une surjection sur les anneaux des sections globales.

Donc $\hat{\theta}'$ est un isomorphisme, et θ' fait de $Y_I^\sim$ un voisinage étale de $X_I^\sim$, c'est donc un isomorphisme.

Fin de la démonstration du théorème. — Considérons le foncteur G défini sur les A' algèbres de la façon suivante.

Soit B' une A' algèbre

$$\varphi' : \operatorname{Spec} B' \rightarrow \operatorname{Spec} A'.$$

On note B et φ les restrictions de (B', φ') au-dessus de A .

Soit

$$\sigma_B = \varphi \circ \sigma : \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} S.$$

On pose encore

$$\sigma_B^*(X)_{\text{ét}} = \varphi^*(\sigma^*(X)_{\text{ét}})$$

et on désigne par

$$\theta_B : \sigma_B^*(X)_{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} Y_B = Y \otimes_A B.$$

l'image réciproque par φ de θ . On pose alors

$$G(B') = \left\{ \begin{array}{l} \text{[morphisme } G_{B'}' : \operatorname{Spec} B' \rightarrow \operatorname{Spec} S \text{ relevant } G_B + \text{voisinage étale de } G_B^*(X) \\ \text{(resp. de } Y' \otimes_{A'} B') \text{ relevant } \sigma_B^*(X)_{\text{ét}} \text{ (resp. } Y_B) + B' \text{ isomorphisme } \theta_{B'} \\ \text{de ces voisinages étales relevant } \theta_B]. \end{array} \right.$$

Ce foncteur commute aux limites inductives.

Il résulte donc du théorème d'approximation de M. Artin [1] que l'élément de $G(\hat{A}')$ exhibé précédemment s'approxime en un élément de $G(A')$.

Et ceci démontre un résultat un peu plus précis que celui qu'on avait annoncé :

THÉORÈME. — Soient $A' \rightarrow A \rightarrow 0$ une surjection dans $C^\sim$, Y' un A' déformation de X_0 induisant Y sur A .

Soient σ un morphisme $\operatorname{Spec} A \xrightarrow{\sigma} \operatorname{Spec} S$, $Y_{\text{ét}}$ un voisinage étale de la fibre fermée de Y , $\sigma^*(X)_{\text{ét}}$ un voisinage étale de la fibre fermée de $\sigma^*(X)$ et θ un A -isomorphisme $\sigma^*(X)_{\text{ét}} \simeq Y_{\text{ét}}$.

Alors il existe $\sigma' : \operatorname{Spec} A' \rightarrow \operatorname{Spec} S$ relevant σ , $Y'_{\text{ét}}$ [resp. $\sigma'^*(X)_{\text{ét}}$] voisinage étale de Y' [resp. $\sigma'^*(X)$] relevant $Y_{\text{ét}}$ [resp. $\sigma^*(X)_{\text{ét}}$] et un A' -isomorphisme

$$\theta' : \sigma'^*(X)_{\text{ét}} \rightarrow Y'_{\text{ét}}$$

relevant θ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN, *Algebraic approximation of structures over complete local rings*, Publication I. H. E. S., n° 36.
- [2] M. ARTIN, *Algebrisation of formal moduli I* (Ann. of Math., vol. 91, 1970, p. 88-135).
- [3] J. BOUTOT, *Groupe de Picard local d'un anneau hensélien* (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, série A, 1971, p. 1248-1250).

- [4] FERRAND et RAYNAUD, *Fibres formelles d'un anneau local noethérien* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 3, 1970, p. 295-312).
- [5] H. HIRONAKA, *Formal line bundles along exceptional loci* (*Algebraic Geometry, Bombay colloquium*, 1968, p. 201-218).
- [6] L. ILLUSIE, *Complexe cotangent I* (*Springer Lecture Notes*, n° 239).
- [7] M. RAYNAUD, *Anneaux locaux henséliens* (*Springer Lecture Notes*, n° 189).
- [8] D. S. RIM, S. G. A. VII, Exp. VI. Publication I. H. E. S., vol. 340.
- [9] M. SCHLESSINGER, *Functor of Artin Rings* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 130, 1968, p. 208-222).
- [10] J.-C. TOUGERON, *Idéaux de fonctions différentiables* (*Thèse, Rennes*, 1967).
- [11] MONSKY et WASHNITZER, *Formal Cohomology I* (*Annals of Math.*, vol. 88, 1968, p. 181-217).

(Manuscrit reçu le 30 juin 1973.)

Renée ELKIK,
104, boulevard Arago,
75014 Paris.

