

COMPITO DI ALGEBRA del 30 GIUGNO 2006

NOME (scrivere stampatello):

COGNOME (scrivere stampatello):

NUMERO DI MATRICOLA:

NUMERO DI RIGA:

(la prima riga è quella più vicina alla cattedra)

NUMERO DI COLONNA:

(la prima colonna è quella più vicina alla porta)

Chi vuole consegnare una sola parte deve farlo entro due ore dall'inizio. Dopo due ore si possono consegnare solo tutte e due le parti (e quindi si rinuncia ad un eventuale esonero ottenuto con i compiti).

Se il numero di riga è pari, sia $v = 0$, mentre se è dispari sia $v = 1$

Se il numero di colonna è pari, sia $w = 0$, mentre se è dispari sia $w = 1$ (esempio: se il numero di riga è 7 e il numero di colonna è 4, si ha $v = 1$ e $w = 0$);

PRIMA PARTE:

Esercizio 1

Siano dati i polinomi

$$p(x) = x^3 + (-w - 4)x^2 + (-v^2 - 2v - 1)x + (v^2 + 2v + 1)w + 4v^2 + 8v + 4$$

$$q(x) = x^3 + (-w - 4)x^2 + (-v^2 - 4v - 4)x + (v^2 + 4v + 4)w + 4v^2 + 16v + 16$$

- Calcolare il prodotto pq .
- Calcolare il massimo comun divisore fra p e q usando l'algoritmo di Euclide.
- Fattorizzare p, q e pq in prodotto di fattori di grado uno usando il risultato del punto precedente.

Esercizio 2

Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, sia S_t il sistema lineare omogeneo associato alla matrice A_t di coefficienti

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & -t \\ -1 & -t + 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

- Usando l'eliminazione di Gauss, trovare una base del sottospazio $V_t = \text{Sol}(S_t)$ delle soluzioni di S_t
- Trovare un sottospazio W_t tale che

$$\mathbb{R}^4 = V_t \oplus W_t$$

SECONDA PARTE:

Esercizio 3

Sia $V = \mathbb{K}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} dei polinomi di grado minore o uguale a 3, e sia $f : V \rightarrow V$ la funzione definita come

$$f(p) = r, \text{ dove } r \text{ è il resto}$$

della divisione di $(2x^2 + v + 1)p$ per il polinomio $x^4 + x^2 + 1 + w$

- Dimostrare che f è una applicazione lineare.
- Calcolare la matrice $M_{\beta_{st}}^{\beta_{st}}(f)$ di f rispetto alla base standard di V definita come $\beta_{st} = \{1, x, x^2, x^3\}$.
- Calcolare la matrice $M_{\beta_{st}}^{\beta}(f)$ di f rispetto alla base $\beta = \{1+x, x+x^2, x^2+x^3, x^3\}$ in partenza e la base β_{st} in arrivo (Suggerimento: i conti fatti per il punto b) possono essere utilizzati anche per questo punto).

Esercizio 4

Sia f_t l'applicazione lineare da \mathbb{R}^3 in se stesso associata (rispetto alla base standard di \mathbb{R}^3) alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -2w + 2t - 2 & -v - t & w - t + 1 \\ w - t + 1 & -w + v + 2t - 1 & -w + t - 1 \\ -3w - v + 2t - 3 & w - v - 2t + 1 & 2w + v - t + 2 \end{pmatrix}$$

- Calcolare il polinomio caratteristico di f_t .
- Trovare tutto lo spettro di f_t , sapendo che contiene il numero $t - w - 1$.
- Determinare per quali valori di t l'applicazione f_t è diagonalizzabile.