

Algebra II
P.Gianni
Programma AA 2014-2015

Anelli e ideali. Anelli e ideali. Anelli a ideali principali e a fattorizzazione unica. Operazioni su ideali di un anello commutativo unitario: somma, prodotto, intersezione, radicale. Ideali coprimi, ideale quoziente, annullatore. Ideali primi, massimali, irriducibili. Nilradicale e radicale di Jacobson. Estensioni e contrazioni di ideali. Prodotto e somma diretta di anelli. Teorema cinese del resto. Interpolazione di Lagrange. L'anello dei polinomi $A[x]$ e i suoi ideali. $\text{Spec } \mathbb{Z}[x]$.

Polinomi in piu' variabili. Ordinamenti monomiali. Algoritmo di divisione per polinomi in $K[x_1, \dots, x_n]$. Monoideali. Frontiera di un monoideale. Lemma di Dickson. Ideali monomiali : caratterizzazione degli ideali monomiali irriducibili, radicali, primi e primari.

Basi di Gröbner. Algoritmo di Buchberger. Proprieta' di eliminazione dell'ordinamento lessicografico. Il risultante. Teoremi di estensione. Teorema degli zeri di Hilbert. Corrispondenza ideali varietati' affini. Ideali zero dimensionali e basi di Gröbner.

Moduli. Moduli su un anello commutativo unitario. Sottomoduli e quozienti. Omomorfismi di moduli. Somma diretta e prodotto diretto di moduli. Moduli liberi, rango. Moduli finitamente generati. Teorema di Hamilton-Cayley. Lemma di Nakayama . Moduli su PID e loro struttura: forma normale di Smith e di Hermite.

Successioni esatte. Successioni di A-moduli e di omomorfismi di A-moduli. I funtori $\text{Hom}(-, N)$ e $\text{Hom}(M, -)$. Successioni che spezzano. Moduli proiettivi. Prodotto tensoriale. Proprieta' del funtore T_N , moduli piatti. Estensione e restrizione di scalari.

Anelli locali e semilocali. Anello delle frazioni e localizzazione di anelli e moduli, ideali degli anelli localizzati, contrazione ed estensione, localizzazioni successive, commutativita' della localizzazione rispetto al passaggio al quoziente. Esattezza del funtore S^{-1} . $S^{-1}A$ e' un A-modulo piatto. Proprieta' locali.

Anelli e moduli noetheriani. Teorema della base di Hilbert. Ideali irriducibili e primari, decomposizione di un ideale come intersezione di ideali primari. Anelli e moduli artiniani. Dimensione di un anello.

Testi consigliati

- M. F. Atiyah, I.G. Macdonald, “Introduzione all’Algebra Commutativa”, trad. di P. Maroscia, Feltrinelli, Milano, 1981.
- H. Matsumura, “Commutative Ring Theory”, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- D.Eisenbud, “Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry”, Graduate Texts in Math., Vol.150, Springer-Verlag, 1994
- M.Reid, “Undergraduate Commutative Algebra”, LMS student series,- CUP1995
- D.Cox, J.Little, D.O’Shea, “Ideals, Varieties and Algorithms”. Springer-Verlag, 1992.

Modalita’ d’esame: L’esame consiste in una prova scritta e una prova orale.