Topologia di Zariski

Sia A un anello e sia $X = \{\text{ideali primi di } A\}$. Per ogni sottoinsieme $E \subset A$, definiamo:

$$V(E) = \{\mathfrak{p} \in X \mid E \subset \mathfrak{p}\} \subset X$$

Esercizio 1. Valgono le seguenti, ($E \subset A$ sottoinsieme, $(E), I, J \subset A$ ideali):

1) $V(E) = V((E)) = V(\sqrt{(E)})$, (quindi basta considerare l'inisieme $\{V(I)\}$ con I ideali radicali).
2) $V(0) = X$, $V(A) = \emptyset$
3) $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ)$ (Unione finita)
4) $\bigcap_\alpha V(I_\alpha) = V(\bigcup_\alpha I_\alpha)$ (Intersezione qualunque)

Soluzione.1) (E) e' il piu' piccolo ideale che contiene E, quindi ogni primo che contiene E contiene anche $(E) \subset \sqrt{(E)} = \bigcap_{(E)\subset\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$.
2) Ovvia
3) $\subset$ segue dal fatto che $IJ \subset I \cap J \subset I$.
$\supset$ Abbiamo provato che se $I \cap J \subset \mathfrak{p}$ allora $\mathfrak{p} \supset I$ o $\mathfrak{p} \supset J$ quindi $V(I) \cup V(J) \supset V(I \cap J)$. Per quanto riguarda $V(IJ)$ sia $\mathfrak{p} \supset IJ$ e supponiamo che $\mathfrak{p} \not\supset I$. Allora $\exists i \in I$ tale che $i \notin \mathfrak{p}$. Poiche' $\forall j \in J$ si ha che $ij \in IJ \subset \mathfrak{p}$ si deve avere $j \in \mathfrak{p}$ ossia $J \subset \mathfrak{p}$.
4) Ovvia.

Definizione. Si dice topologia di Zariski su X la topologia i cui chiusi sono gli insiemi del tipo:

$$V(E) = \{\mathfrak{p} \in X \mid E \subset \mathfrak{p}\} \subset X$$

con $E \subset A$ sottoinsieme. $(X, \text{topologia di Zariski}) = \mathbf{Spec}(A)$ si chiama lo spettro di Zariski di A.

Esercizio 2. Provare che gli insiemi

$$X_f = X - V(\{f\}) = X - V((f)) = \{\mathfrak{p} \in X \mid (f) \not\subset \mathfrak{p}\}$$

sono un a base di aperti per X.
Soluzione. Basta vedere che ogni aperto $X - V(I)$ si scrive come unione di X_f. Poiche' $V(I) = \bigcap_{f\in I} V(f)$ si ha che $X - V(I) = (V(I))^c = (\bigcap_{f\in I} V(f))^c = \bigcup_{f\in I}(V(f))^c = \bigcup_{f\in I} X_f$.

Esercizio 3. Provare che X con la topologia di Zariski e' compatto.
Soluzione. X e' compattto se e solo se da ogni ricoprimento aperto formato da aperti della base si puo' estrarre un sottoricoprimento finito. Sia $X = \bigcup_{j \in J} X_{f_j} = \bigcup_j (X - V(f_j)) = X - \bigcap_j V(f_j) = X - V(\bigcup_j \{f_j\})$. Allora $V(\bigcup_j \{f_j\}) = \emptyset$ ossia $\{f_j\}_{j \in J}$ generano A, dunque $1 = \sum_{j \in H} g_j f_j$ con $H \subset J$ finito e $g_j \in A$, da cui segue che $X = \bigcup_{j \in H} X_{f_j}$ ossia $\{X_{f_j}\}_{j \in H}$ e' un sottoricoprimento finito.

Esercizio 4. Provare che se $Y \subset X$ allora $\overline{Y} = V(\cap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p})$ ($\mathfrak{p}$ primi).
Soluzione Innanzitutto osserviamo che $\overline{Y}$ e' chiuso, quindi $\overline{Y} = V(I)$ con I ideale di A. Si ha $Y \subset V(\cap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p})$, perché se $\mathfrak{q} \in Y$ allora $\mathfrak{q} \supset \cap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}$ e quindi $\mathfrak{q} \in V(\cap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p})$. Inoltre vediamo che $V(I) \supset V(\cap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}$: basta provare che $I \subset \cap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}$; questo e' vero perché per ogni $\mathfrak{p} \in Y$, $\mathfrak{p} \in V(I)$ e quindi $\mathfrak{p} \supset I$. Dunque $Y \subset V(\cap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p} \subset V(I) = \overline{Y}$, passando alla chiusura si ha la tesi.

Esercizio 5. Provare che la topologia di Zariski e' T_0 ma non T_1 (in particolare neanche T_2).
Soluzione Dall'esercizio precedente segue che se $\mathfrak{p}$ e' primo $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$ e $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \{\mathfrak{p}\}$ se e solo se $\mathfrak{p}$ e' massimale. Quindi X non e' T_1, in quanto sono chiusi solo i punti dati da ideali massimali. In particolare non e' nemmeno T_2.
Per provare che e' T_0 siano $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ due punti distinti di X, ossia primi distinti. Allora esiste $y \in \mathfrak{p}_1$ e $y \notin \mathfrak{p}_2$ (o viceversa) e quindi $X_y = X - V(y)$ e' un aperto che contiene $\mathfrak{p}_2$ e non $\mathfrak{p}_1$

Esercizio 6. Sia $\varphi : A \to B$ un omomorfismo di anelli. Provare che $\varphi^* : Spec(B) \to Spec(A)$ data da $\varphi^*(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ e' continua.
Soluzione Poniamo $X = Spec(A)$ e $Y = Spec(B)$, basta verificare che $(\varphi^*)^{-1}(X_f) = Y_{\varphi(f)}$.

Esercizio 7. Se $\mathfrak{N}(A)$ e' il nilradicale di A, allora $Spec(A)$ e $Spec(A/\mathfrak{N}(A)$ sono omeomorfi.
Soluzione Per l'esercizio precedente $\pi^* : Spec(A) \longrightarrow Spec(A/\mathfrak{N}(A))$ indotta da $\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{N}(A)$ e' continua. Inoltre π^* e' biunivoca, dato che π stabilisce una corrispondenza biunivoca tra gli ideali (primi) di $A/\mathfrak{N}(A)$ e gli ideali (primi) di A che contengono $\mathfrak{N}(A)$ e quindi tutti gli ideali primi di A. Dato che $\pi^*(V(I)) = V(\pi^{-1}(I))$ allora π^* e' chiusa e quindi un omeomorfismo.

Esercizio 8. Provare che $Spec(A)$ e' irriducibile come spazio topologico se e solo se $\mathfrak{N}(A)$ e' primo (ossia se e solo se esiste un solo ideale primo minimale).

Soluzione Ricordiamo che uno spazio topologico X si dice irriducibile se e solo se per ogni coppia di aperti non vuoti $A, B \subset X$, $A \cap B \neq \emptyset$ se e solo se per ogni aperto $A \neq \emptyset$ si ha $\overline{A} = X$.
Per l'esercizio precedente possiamo supporre che l'anello A sia ridotto (ossia $\mathfrak{N}(A) = (0)$) e quindi dobbiamo provare che $X = Spec(A)$ e' irriducibile se e solo se (0) e' primo.
Siano $f, g \in (0)$ ossia $fg = 0$, allora $X_f \cap X_g = V(f)^c \cap V(g)^c = (V(f) \cup V(g))^c = (V(fg))^c = (V(0))^c = \emptyset$. Se X e' irriducibile allora $X_f = \emptyset$ (o $X_g = \emptyset$) ossia $V(f) = X$ (o $V(g) = X$). Questo equivale a dire che per ogni primo $\mathfrak{p}$, $f \in \mathfrak{p}$ e quindi $f \in \mathfrak{N}(A) = (0)$ (oppure $g = 0$).
Viceversa supponiamo che (0) sia primo e siano $X - V(I)$ e $X - V(J)$ due aperti non vuoti. Dato che $V(I) \neq X$ e $V(J) \neq X$ si ha che $I \neq (0)$ e $J \neq (0)$ e quindi $(0) \in (X - V(I)) \cap (X - V(J))$, ossia l'intersezione e' non vuota.

Esercizio 9. Provare che $Spec(\mathbb{Z}[x]) = \{(0), (p), (f(x)), (p, g(x))\}$ dove $p \in \mathbb{Z}$ e' un primo, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio irriducibile e $g(x)$ iun polinomio irriducibile $\pmod p$.