Algebra II - Esercitazione

Esercizio 1. (The snake Lemma) Dato il seguente diagramma commutativo di A-moduli con frecce esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} & & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow^{\alpha} & & \downarrow^{\beta} & & \downarrow^{\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f'} & N' & \xrightarrow{g'} & P' & & \end{array}$$

Esiste una successione esatta

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{Ker}(\beta) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\delta} \mathrm{coker}(\alpha) \xrightarrow{\overline{f'}} \mathrm{coker}(\beta) \xrightarrow{\overline{g'}} \mathrm{coker}(\gamma)$$

inoltre se f e' iniettivo anche $\tilde{f}$ e' iniettivo e se g' e' surgettivo anche $\tilde{g}'$ e' surgettivo.

Soluzione. Gli omomorfismi $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ sono definite come le restrizioni di f e g. $\tilde{f}$ e' ben definita dato che se $m \in \mathrm{Ker}(\alpha)$ allora $\beta(f(m)) = f'(\alpha(m)) = 0$, ossia $f(m) \in \mathrm{Ker}(\beta)$. Analogamente $\tilde{g}$ e' ben definita Gli omomorfismi $\overline{f'}$ e $\overline{g'}$ sono dati da $\overline{f'}(m + Im(\alpha)) = f'(m) + Im(\beta)$ e $\overline{g'}(n + Im(\beta)) = g'(n) + Im(\gamma)$. $\overline{f'}$ e' ben definita, dato che se $m \equiv m' \pmod{Im(\alpha)}$ e $a = m - m'$ si ha $f'(m - m') = f'(\alpha(a)) = \beta(f(a)) \in Im(\beta)$. In modo simile anche $\overline{g'}$ e' ben definita.

L'omomorfismo δ e' definito nel modo seguente: Sia $p \in \ker(\gamma) \subset P$ e sia $n \in N$ tale che $g(n) = p$ (g e' surgettiva). Dato che $0 = \gamma(g(n)) = g'(\beta(n))$ si ha che $\beta(n) \in \ker(g') = Im(f')$ e quindi esiste un unico $m \in M'$ tale che $f'(m) = \beta(n)$,(f' e' iniettiva). Definiamo $\delta(p) = m + Im(\alpha)$. Per vedere che e' ben definita dobbiamo vedere che se $n' \in N$ e' tale che $g(n') = p$ e $m' \in M'$ e tale che $f'(m') = \beta(n')$ allora $m - m' \in Im(\alpha)$. Si ha $n - n' \in \ker(g) = Im(f)$, quindi esiste $b \in M$ tale che $f(b) = n - n'$, cosí $\beta(n - n') = \beta(f(b)) = f'(\alpha(b)) = f(m - m')$. Dato che f' e' iniettiva $m - m' = \alpha(b)$, quindi δ e' ben definito ed e' immediato vedere che e' un omomorfismo.

Dobbiamo ora vedere l'esattezza della successione.

Esattezza in $\ker(\beta)$**.** $\tilde{g} \circ \tilde{f} = 0$ dato che $g \circ f = 0$. Viceversa si $n \in \ker(\beta)$ tale che $\tilde{g}(n) = 0$. Si ha anche $g(n) = 0$ quindi $n \in \ker(g) = Im(f)$ ed esiste $m \in M$ tale che $f(m) = n$. Dobbiamo provare che $n \in \ker(\alpha)$. Si ha $f'(\alpha(m)) = \beta(f(m)) = \beta(n) = 0$, dato che f' e' iniettiva $\alpha(m) = 0$ e $m \in \ker(\alpha)$.

Esattezza in $\ker(\gamma)$. Sia $n \in \ker(\beta)$. Per calcolare $\delta(\tilde{g}(n))$ scegliamo $n \in N$ come sollevamento in N. Dato che $\beta(n) = 0$, $\beta(n) = f'(0)$ e quindi $\delta(\tilde{g}(n)) = 0 + Im(\alpha)$, cosi' $\delta \circ \tilde{g} = 0$. Viceversa sia $p \in \ker(\gamma) \cap \ker(\delta)$. Scrivendo $p = g(n)$ si ha che $\beta(n) = f'(m)$ con $m \in Im(\alpha)$. Sia $u \in M$ tale che $f(u) = m$, allora $\beta(f(u)) = f'(\alpha(u)) = \beta(n)$. Quindi $f(u) - n \in \ker(\beta)$. Inoltre $\tilde{g}(n - f(u)) = g(n) - g(f(u)) = g(n) = p$, ossia $n \in Im(\tilde{g})$.

Esattezza in $\operatorname{coker}(\alpha)$. Sia $p \in \ker(\gamma)$. Scrivendo $p = g(n)$ e $\beta(n) = f'(m)$ si ha che $\delta(p) = m + Im(\alpha)$. Allora $\overline{f'}(\delta(p)) = f'(m) + Im(\beta) = 0$ dato che $f'(m) \in Im(\beta)$. Viceversa, se $m + Im(alpha) \in \ker(\overline{f'})$ allora $\overline{f'}(m) \in Im(\beta)$. Sia $n \in N$ tale che $\overline{f'}(m) = \beta(n)$ e sia $p = g(n)$. Allora $\gamma(g(n)) = g'(\beta(n)) = 0$, quindi $p \in \ker(\gamma)$ e $\delta(p) = m + Im(\alpha)$ per la definizione di δ da cui $m + Im(\alpha) \in Im(\delta)$.
Esattezza in $\operatorname{coker}(\beta)$. $\overline{g'} \circ \overline{f'}$ e' chiaramente zero. Viceversa sia $n + Im(\beta) \in \ker(\overline{g'})$. allora $g(n) \in Im(\gamma)$ ed esiste $p \in P$ tale che $g'(n) = \gamma(p)$. Sia $b \in N$ tale che $g(b) = p$ e consideriamo l'elemento $n - \beta(b) \equiv n \pmod{Im(\beta)}$. Si ha $g(n - \beta(b)) = g(n) - g(\beta(b)) = g(n) - \gamma(g'(b)) = 0$ e quindi possiamo assumere che $g(n) = 0$, cosí $n \in \ker(g') = Im(f')$ e $n = f'(m)$ per $m \in M'$. Allora $n + Im(\beta) = \overline{f'}(m + Im(\alpha))$ e $n + Im(\beta) \in Im(\overline{f'})$.
Infine osserviamo che se f e' iniettiva allora $\tilde{f} = f_{|\ker(\alpha)}$ e' iniettiva. Se g' e' surgettiva e $p + Im(\gamma) \in \operatorname{coker}(\gamma)$ esiste $n' \in N'$ tale che $g'(n') = p$. Allora $p + Im(\gamma) = \overline{g'}(n + Im(\beta))$ e quindi anche $\overline{g'}$ e' surgettiva.

Esercizio 2. (Lemma dei 5) Dato il seguente diagramma commutativo di A-moduli con frecce esatte:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow^{\alpha} & & \downarrow^{\beta} & & \downarrow^{\gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f'} & N' & \xrightarrow{g'} & P' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

provare che se due qualunque degli omomorfismi α, β, γ sono isomorfismi allora anche il terzo e' un isomorfismo.
Soluzione. E' una immediata conseguenza dell'esercizio precedente.

Esercizio 3. Sia

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P \longrightarrow 0$$

una successione esatta di A-moduli. Provare che le seguenti tre condizioni sono equivalenti:

i) esiste un isomorfismo $N \cong M \oplus P$ relativamente al quale $\alpha(m) = (m, 0)$ e $\beta(m, n) = n$.

ii) esiste un'applicazione $r : N \longrightarrow M$ tale che $r \circ \alpha = id_M$. (tale r si dice una *retrazione di* β).

iii) esiste un'applicazione $s : P \longrightarrow N$ tale che $\beta \circ s = id_P$. (tale s si dice una *sezione di* β.

Se una delle condizioni vale si dice che la successione "spezza".
Soluzione. i) $\Longrightarrow$ ii). Per ogni $n = (m, p) \in N$ basta definire $r(n) = m$.

i) $\Longrightarrow$ iii). Poiche' β e' surgettiva, per ogni $p \in P$ esiste $n = (m,p) \in N$ tale che $\beta(n) = p$. Definiamo $s(p) = (0,p)$.
ii) $\Longrightarrow$ i). Scriviamo $n = (n - \alpha(r(n))) + \alpha(r(n))$ e sia L il sottomodulo di N modulo generato da tutti gli elementi della forma $(n - \alpha r(n))$. Si ha che $N = Im(\alpha) \oplus L$. Infatti se $u \in Im(\alpha) \cap L$, da $u = n - \alpha(r(n)) = \alpha(m)$, dato che $r \circ \alpha = id_M$, si ottiene $r(u) = r(n) - r(\alpha(r(n))) = 0 = m$ e quindi poiche' α e' iniettiva $u = 0$. Poiche' $\beta_{|L}$ e' un isomorfismo e $Im(\alpha) \cong M$ la tesi segue.
iii) $\Longrightarrow$ i). La dimostrazione e' analoga alla precedente. Si consideri $n = (n - s(\beta(n))) + s(\beta(n))$. Poiche' $(n - s(\beta(n))) \in Ker(\beta) = Im(\alpha)$ e $Im(\alpha) \cap Im(s) = (0)$, otteniamo $N = Im(\alpha) \oplus s(P) \cong M \oplus P$.

Esercizio 4. Un A modulo libero e' proiettivo. Se $P = \oplus_i P_i$, P e' proiettivo se e solo se, per ogni i, P_i e' proiettivo.

Esercizio 5. Sia P un $A-$modulo. Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) P e' proiettivo

(ii) Per ogni successione estta corta

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M" \longrightarrow 0$$

la successione

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(P, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(P, M") \longrightarrow 0$$

e' esatta.

(iii) Se $g : M \longrightarrow P$ e' surgettivo esiste $s : P \longrightarrow M$ tale che $g \circ s = id_P$.

(iv) Ogni successione esatta $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ spezza.

(v) P e' addendo diretto di ogni modulo di cui e' quoziente.

(vi) P e'addendo diretto di un A-modulo libero.

Esercizio 6. Se A e' PID ogni A-modulo proiettivo e' libero.

Esercizio 7. Se A e' PID ogni sottomodulo di un modulo proiettivo e' proiettivo.

Esercizio 8. Se A e' PID ogni sottomodulo di un modulo finitamente generato e' finitamente generato.