Esercizi di Algebra Commutativa
Foglio 2- Tracce delle Soluzioni

1. Sia x un elemento nilpotente di A. Provare che $1 + x$ è un'unità di A. Dedurre che la somma di un elemento nilpotente e di un'unità è un'unità.

   Soluzione. Poiche' x e' nilpotente, esiste $n > 0$ tale che $x^n = 0$. Da questo segue che $1 = 1 + x^n = (1 + x)\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i x^i$ ossia la tesi. Se poi $a \in A$ e' un elemento invertibile, basta osservare che $a + x = a(1 + a^{-1}x)$ e quindi poiche' $a^{-1}x$ e' nilpotente dalla prima parte dell'esercizio segue la tesi.

2. Sia $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in A[x]$.

   (a) f è invertibile se e solo se a_0 è invertibile e $a_1, \ldots, a_n$ sono nilpotenti.

   (b) f è nilpotente se e solo se $a_0, \ldots, a_n$ sono nilpotenti.

   (c) f è zerodivisore se e solo se esiste $a \in A, a \neq 0$ t.c. $af = 0$.

   (d) $f, g \in A[x]$ sono primitivi se e solo se fg è primitivo, (un polinomio f si dice primitivo se e solo se $I(f) = (a_0, .., a_n) = (1)$.

   Soluzione. (a)Il "solo se" segue dall'esercizio precedente. Supponiamo quindi che f sia invertibile e sia $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ tale che $fg = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i = 1$. Otteniamo $c_0 = a_0 b_0 = 1$ quindi a_0 e b_0 sono unita'. Inoltre da $c_{n+m} = a_n b_m = 0$ e $c_{n+m-1} = a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m = 0$ otteniamo che ${a_n}^2 b_{m-1} + a_{n-1} a_n b_m = {a_n}^2 b_{m-1} = 0$. Iterando si ha che da $c_{n+m-r} = 0$ si ricava la relazione ${a_n}^{r+1} b_{m-r} = 0$ che per $m = r$ diviene ${a_n}^{m+1} b_0 = 0$. Poiche' b_0 e' una unita' questo implica che a_n e' nilpotente. La tesi si ottiene ripetendo il ragionamento per $f - a_n x^n$.

   (b) Sia f un divisore di zero e sia $g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ il polinomio di minimo grado m tale che $fg = 0$. Poiche' $a_n b_m = 0$ si ha che $a_n g = 0$ ossia $a_n b_i = 0$ per ogni i, quindi si ha anche che $a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1} = a_{n-1} b_m = 0$ e quindi che $a_{n-1} g = 0$. Iterando il ragionamento otteniamo che per ogni i vale $a_i b_m = 0$. La tesi allora vale con $a = b_m$. Il viceversa e' ovvio.

   (c) Se $a_0, \ldots, a_n$ sono nilpotenti allora f e' nilpotente. Viceversa se f e' nilpotente, consideriamo il polinomio $g = 1 + xf$. Per l'esercizio 1 g e' invertibile, in quanto somma di una unita' e di un elemento nilpotente, ma allora la tesi segue dal punto (a).

   (d) Se fg primitivo si ha che $(1) = I(fg) \subset I(f)I(g)$ quindi anche $I(f) = I(g) = (1)$. Viceversa se $I(f) = I(g) = (1)$ allora per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A esistono almeno due indici i, j tali che $a_i, b_j \notin \mathfrak{m}$. Siano i, j minimi rispetto a questa proprieta'. Allora il coefficiente di x^{i+j} non appartiene a $\mathfrak{m}$. Poiche' $I(fg)$ non e' contenuto in nessun ideale massimale allora $I(fg) = (1)$.

3. In $A[x]$ il radicale di Jacobson e il nilradicale coincidono.

Soluzione. Poiche' ogni massimale e' primo e' sempre vero che il radicale di Jacobson $\mathfrak{J}(A[x])$ contiene il nilradicale di $A[x]$, $\mathfrak{N}(A[x])$. Viceversa se $g \in \mathfrak{J}(A[x])$, allora $1 + gx$ e' invertibile e quindi, i coefficienti di g sono nilpotenti da cui segue che g e' nilpotente e quindi $g \in \mathfrak{N}(A[x])$.

4. Sia $p(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i \in A[[x]]$.
   (a) p è invertibile se e solo se a_0 è invertibile.
   (b) Se p è nilpotente allora $\forall i \ \ a_i$ e' nilpotente. È vero il viceversa?
   (c) $p \in \mathfrak{J}(A[[x]])$ se solo se $a_0 \in \mathfrak{J}(A)$ (dove $\mathfrak{J}(A)$ indica il radicale di Jacobson di A).
   (d) la contrazione di un ideale massimale $\mathfrak{m}$ di $A[[x]]$ è un ideale massimale di A e $\mathfrak{m}$ è generato da $\mathfrak{m}^c$ e x.

   Soluzione. (a) Se p e' invertibile, esiste q tale che $pq = 1$ quindi a_0 e' invertibile.

   Viceversa supponiamo che a_0 sia invertibile e costruiamo $q = \sum_{i\geq 0} b_i x^i \in A[[x]]$ inverso di p. Dalla condizione $pq = 1$ otteniamo $a_0 b_0 = 1, a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0, .., \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = 0$ e quindi $b_0 = {a_0}^{-1}, b_1 = -{a_0}^{-1} a_1 b_0, ..., b_k = -{a_0}^{-1} \sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i}$.

   (b) Se p è nilpotente allora $p^n = 0$ da cui a_0 e' nilpotente, e cosi' $p - a_0 = x \sum_{i\geq 1} a_i x^i$ e' nilpotente. Iterando il ragionamento otteniamo che $\forall i \ \ a_i$ e' nilpotente.

   Il viceversa e' falso (a meno che A sia noetheriano). Consideriamo $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$. Notiamo che in $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ (2) e' l'unico massimale. Sia $p \in A$, $p = (0, 0, ...) + (0, 2, 0, 0..)x + (0, 0, 2, 0, ..)x^2 + ..$. Tutti i coefficienti di p sono nilpotenti ma p non e' nilpotente.

   (c) Se $p \in \mathfrak{J}(A[[x]])$ se e solo se $1 - pq$ e' invertibile per ogni $q \in A[[x]]$. Questo equivale a dire che $1 - a_0 b_0$ e' invertibile per ogni $b_0 \in A$, ossia se e solo se $a_0 \in \mathfrak{J}(A)$.

   (d) Sia $\mathfrak{m} \subset A[[x]]$ un ideale massimale. Osserviamo innanzitutto che $x \in \mathfrak{m}$. Infatti se $x \notin \mathfrak{m}$, per la massimalita' di $\mathfrak{m}$ si avrebbe $(\mathfrak{m}, 1) = 1$ e quindi esisterebbero $f \in \mathfrak{m}$ e $g, h \in A[[x]]$ tali che $1 = fg + xh = f_0 g_0 + x\bar{h}$, dove f_0, g_0 indicano i termini not di f e g rispettivamente. Dalla relazione segue quindi che f_0 e' invertibile e quindi che f e' invertibile in $A[[x]]$ (per a)) contro l'ipotesi $\mathfrak{m}$ massimale (quindi proprio). Cosi' si ha che $(\mathfrak{m}, x) = \mathfrak{m}$. Consideriamo l'insieme $\mathfrak{n} = \{a \in A \mid a + \sum_{i>0}^{k} a_i x^i \in \mathfrak{m}\}$. E' immediato provare che $\mathfrak{n}$ e' un ideale di A e per l'osservazione precedente $(\mathfrak{n}, x) \subseteq \mathfrak{m}$. Poiche' si ha anche che $\forall f \in \mathfrak{m}$, $f = a + x \sum_{i\geq 0}^{k} a_i x^i \in (\mathfrak{n}, x)$, per la massimalita' di $\mathfrak{m}$ si ha $\mathfrak{m} = (\mathfrak{n}, x)$ e $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}^c$. Infine $\mathfrak{n}$ e' massimale poiche' $A[[x]]/\mathfrak{m} \cong A/\mathfrak{m}^c$ e' un campo.

5. Sia $\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di un anello A. Allora $\sqrt{\cup_\alpha E_\alpha} = \cup_\alpha \sqrt{E_\alpha}$

   Soluzione. $x \in \sqrt{\cup_\alpha E_\alpha} \iff \exists n, \ \exists \alpha \ \ t.c. \ \ x^n \in E_\alpha \iff x \in \cup_\alpha \sqrt{E_\alpha}$.

6. Sia D l'insieme degli zero divisori di un anello A. Provare che $D = \cup_{x\neq 0}\sqrt{\mathrm{Ann}(x)}$.

   Soluzione. Poiche' $D = \cup_{x\neq 0}\mathrm{Ann}(x)$. Per l'esercizio precedente basta provare che $D = \sqrt{D}$. Ma se $x \in \sqrt{D}$ allora $x^n \in D$ ed esiste $y \neq 0$ tale che $x^n y = 0$. Se $x^{n-1} \notin D$ allora $x^{n-1}x \neq 0$ e quindi $x \in D$.

7. Sia A un anello, Σ l'insieme di tutti gli ideali in cui ogni elemento è uno zerodivisore. Allora Σ possiede elementi massimali e ogni elemento massimale è un ideale primo. (Quindi l'insieme degli zerodivisori è unione di ideali primi).

   Soluzione. Σ e' non vuoto perche' contiene (0), e data una catena $\{I_\alpha\}$ di ideali in Σ, allora $I = \cup I_\alpha$ e' un ideale di Σ quindi per il lemma di Zorn esistono elementi massimali. Sia P un elemento massimale e siano $a, b, \in A$ tali che $ab \in P$. Consideriamo gli ideali (P, a) e (P, b) e proviamo che uno dei due appartiene a Σ, il che contraddirrebbe la massimalita' di P. Se questo non fosse vero vero esisterebbero $x = p_1 + t_1 a \in (P, a)$ e $y = p_2 + t_2 b \in (P, b)$ che non sono divisori di zero. D'altra parte $xy \in P$ e quindi esiste $z \neq 0$ tale che $xyz = 0$. Dato che x non e' divisore di zero $yz = 0$ e dato che y non e' divisore di zero allora $z = 0$ a cui l'assurdo.

8. Sia A un anello tale che per ogni ideale I non contenuto nel nilradicale esiste $x \neq 0,\ x \in I$ tale che $x^2 = x$. Allora il radicale di Jacobson e il nilradicale coincidono.

   Soluzione Se $\mathfrak{J}(A) \not\subset \mathfrak{N}(A)$ esiste $e \in \mathfrak{J}(A)$, $e \neq 0$ tale che $e = e^2$, ossia $e(1-e) = 0$. Poiche' $1 - e$ e' invertibile si ottiene $e = 0$ contro le ipotesi.

9. Sia A un anello in cui per ogni elemento x esiste $n > 1$ tale che $x^n = x$. Allora ogni ideale primo è massimale.

   Soluzione Sia $\mathfrak{p} \subset A$ un ideale primo e sia $x \notin \mathfrak{p}$. Poiche' $x^n - x = x(x^{n-1} - 1) = 0$, $x^{n-1} - 1 \in \mathfrak{p}$ da cui segue che $(\mathfrak{p}, x) = (1)$ e quindi $\mathfrak{p}$ e' massimale.

10. Sia A un anello. Provare che l'insieme degli ideali primi di A possiede elementi minimali rispetto all'inclusione.

    Soluzione L'insieme degli ideali primi ordinato per inclusione e' non vuoto, perche' esiste sempre un ideale massimale. Consideriamo $P_0 \supseteq P_1 \supseteq \ldots$ con i P_i primi e sia $P = \cap P_i$. Vogliamo vedere che P e' primo. Siano $a, b \in A$ e $ab \in P$. Quindi $ab \in P_i, \forall i$. Supponiamo che $a, b \notin P$. Allora esistono n, m tali che $a \notin P_n$ e $b \notin P_m$, se allora $m \leq n$ (ossia $P_m \supseteq P_n$) $ab \notin P_n$, contro le ipotesi. Per Zorn segue la tesi.

11. Sia A un anello. Provare che $A \cong A_1 \times A_2$ se e soltanto se esiste $e \in A$, $e \neq 0, 1$ tale che $e^2 = e$.

    Soluzione Sia $e \in A$ idempotente. Per ogni $a \in A$ si ha $a = ea + (1-e)a$ e $A \cong A_1 \times A_2$ con $A_1 \cong eA \cong A/(1-e)A$ e $A_2 \cong (1-e)A \cong A/eA$. Viceversa $e \cong (1, 0)$ e' l'idempotente cercato.

12. Siano I, J due ideali coprimi di un anello A. Allora $I \cap J = I \cdot J$.

    Soluzione Basta provare l'inclusione $I \cap J \subseteq IJ$. Poiche' I, J sono coprimi esistono $i \in I$ e $j \in J$ tali che $i + j = 1$. Sia $a \in I \cap J$, si ha $a = a(i + j) = ai + aj \in IJ$.

13. Sia A un dominio infinito con un numero finito di elementi invertibili. Allora A possiede un numero infinito di ideali massimali.

    Soluzione. Per ogni i esiste Se $0 \neq x_i \in \mathfrak{m}_i$, allora $0 \neq x = \prod x_i \in \cap \mathfrak{m}_i = \mathfrak{J}(A)$, quindi per ogni $y \in A$ $1 - xy$ e' invertibile. Poiche' A (infinito) ha un numero finito di elementi di elementi invertibili esiste $y_1 \neq y$ tale che $1 - xy = 1 - xy_1$, poiche' A e' un dominio questo implica che $y = y_1$, contro le ipotesi.

14. Sia A un anello, $\mathcal{R}$ il nilradicale. Allora sono fatti equivalenti:

    1) A possiede un unico ideale primo
    2) ogni elemento di A è invertibile oppure nilpotente
    3) $A/\mathcal{R}$ è un campo

    Soluzione 1) => 2). In questo caso A e' un anello locale e $\mathcal{R} = \mathfrak{m}$. Se $x \in \mathfrak{m}$ allora e' nilpotente altrimenti $(x, \mathfrak{m}) = 1$ e quindi esistono $y \in A$, $m \in \mathfrak{m}$, tali che $1 = xy + m$, dato che m e' nilpotente $1 - m = xy$ e' una unita' di A e quindi x e' invertibile.

    2) => 3). Se x e' nilpotente $x \in \mathcal{R}$ e quindi $\bar{x} = 0$ in $A/\mathcal{R}$; se x non e' nilpotente x e' invertibile in A e quindi anche in $A/\mathcal{R}$: Cosi' ogni elemento $\bar{} \neq 0$ e' invertibile in $A/\mathcal{R}$ che quindi e' un campo.

    3) => 1) Sia $P \subset A$ primo. $\mathcal{R} = \cap_{\mathcal{P}} P_i \subset P$, conn $\mathcal{P} = \{$ primi di $A\}$, ma poiche' $\mathcal{R}$ e' massimale si ha $\mathcal{R} = P$, ossia esiste solo un primo $P \subset A$.

15. Un anello locale A non contiene idempotenti diversi da $0, 1$.

    Soluzione Sia e un idempotente. Se e non e' un'unita' allora e' contenuto nell'ideale massimale di A, ma allora da $e(1 - e) = 0$, poiche' $1 - e$ e' invertibile si ottiene $e = 0$.

16. Un anello si dice booleano se $x^2 = x$ per ogni $x \in A$. Provare che se A è booleano allora:

    a) $2x = 0$ per ogni $x \in A$
    b) ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ è massimale e $A/\mathfrak{p}$ è un campo con due elementi
    c) ogni ideale finitamente generato è principale.

    Soluzione a) $2x = (x + x) = (x + x)^2 = 4x$ da cui $2x = 0$.

    b) Per l'esercizio 9 ogni primo e' massimale e quindi $A/\mathfrak{p}$ e' un campo e se $\bar{x} \neq 0$ si ha che $\bar{x}^2 = \bar{x}$ da cui $\bar{x} = 0$ oppure $\bar{x} = 1$.

    c) Basta osservare che $(x, y) = (x + y - xy)$.

17. Sia A un anello tale che ogni ideale primo è principale. Allora A è a ideali principali.

    Soluzione. Sia $\Sigma = \{I \subset A \mid I \text{ non e' principale }\}$. Supponiamo che $\Sigma \neq \emptyset$. Allora dato che le catene ascendenti sono limitate (l'unione degli elementi di una catena non e' principale e quindi e' contenuta in un massimale) per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale $\bar{I} \in \Sigma$. Poiche' $\bar{I}$ non e' principale, non e' primo ed esistono $a, b \notin \bar{I}$ tali che $ab \in \bar{I}$. Inoltre poiche' $a \notin \bar{I}$, per la massimalita' di $\bar{I}$ l'ideale (I, a) e' principale. Sia $(c) = (\bar{I}, a)$. Inoltre $(\bar{I} : c)$ contiene propriamente $\bar{I}$. Infatti da $c = i + ak$ otteniamo $bc = bi + abk \in \bar{I}$ e quindi $b \in (\bar{I} : c)$ e $b \notin \bar{I}$. Quindi sempre per la massimalita' di $\bar{I}$ anche $(\bar{I} : c) = (d)$ e' principale. Troviamo l'assurdo provando che $\bar{I} = (cd)$. Poiche' $d \in (\bar{I} : c)$ si ha che $(cd) \subset \bar{I}$. Viceversa sia $j \in \bar{I} \subset (\bar{I}, a) = (c)$. Allora $j = ck$ da cui $k \in (\bar{I} : c) = (d)$ ed esiste h tale che $k = hd$ e $j = hcd \in (cd)$.