Algebra II - 3 Settembre 2015
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. Siano $I, J, K_1, .., K_n \subset A$ ideali. Provare che:

i) $(I + J)(I \cap J) \subset IJ$

ii) se $I + K_i = A$ per ogni $1 \leq i \leq n$ allora si ha $I + K_1 K_2 ... K_n = A$.

iii) Un elemento $a \in A$ non è divisore di zero in A/I se e solo se $I : (a) = I$.

Soluzione. i) $(I + J)(I \cap J) = I(I \cap J) + J(I \cap J) \subset IJ + IJ = IJ$.
ii)) Per induzione su n. E' ovvio per $n = 1$. Se $n = 2$, allora per $i = 1, 2$ siano $a_i \in I$ e $b_i \in K_i$ tali che $1 = a_i + b_i$. Allora $1 = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = a_1a_2 + a_1b_2 + a_2b_1 + b_1b_2 \in I + K_1K_2$. Sia ora $n \geq 3$. Per ipotesi induttiva si ha $I + K_1..K_{n-1} = A$ e per ipotesi $I + K_n = A$, allora ripetendo il ragionamento del caso $n = 2$ si ha $I + K_1..K_n = A$
iii) Se a non è uno zero divisore in A/I allora per ogni $b \in (I : a)$ da $ba \equiv 0 \pmod I$ segue $b \in I$.
Viceversa sia $I : (a) = I$, quindi se $b(a) \subset I$ allora $b \in I$. Allora $a(b \pmod I) = ab \pmod I \equiv 0$ implica che $b \equiv 0 \pmod I$ e quindi a non è divisore di zero.

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera (e in tal caso provarla) o se è falsa (e in tal caso fornire un controesempio):

i) Siano A e B C–algebre. Se A e B sono domini allora $A \otimes_C B$ è 0 o è un dominio.

ii) Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale e sia $\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{m}$. Si ha che $a \in A^*$ se e solo se $\pi(a) \in (A/\mathfrak{m})^*$.

iii) Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello noetheriano locale. Se le immagini di elementi $a_1, .., a_n \in A$ generano $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ come spazio vettoriale, allora $\mathfrak{m} = (a_1, .., a_n)$.

Soluzione i) Falso. Siano $A = \mathbb{Q}[x, y]/(x^2 + 1)$ e $B = \mathbb{Q}[x, y]/(y^2 + 1)$, A e B sono domini e $\mathbb{Q}[x, y]$- algebre, mentre $A \otimes_{\mathbb{Q}[x,y]} B \cong \mathbb{Q}[x, y]/(x^2 - 1, y^2 + 1)$ non è un dominio.
ii) Vero. Dato che A è locale si ha $A^* = A \setminus \mathfrak{m}$, inoltre $A/\mathfrak{m}$ è un campo, quindi:

$$\pi(a) \in (A/\mathfrak{m})^* \Longleftrightarrow a \notin \mathfrak{m} \Longleftrightarrow a \in a^*.$$

iii) Vero. Dato che $\mathfrak{m}$ è un A-modulo finitamente generato, inoltre per ipotesi, se $\mathfrak{m}_0 = (a_1, .., a_n)$, allora si ha $\mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ (Come A-moduli). Poiché A è locale per Nakayama segue che $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$.

Esercizio 3. Sia A un anello. Provare che:

i) A è ridotto se e solo se per ogni primo $\mathfrak{p} \subset A$, $A_\mathfrak{p}$ è ridotto.

ii) Se A è ridotto allora per ogni primo minimale $\mathfrak{p} \subset A$, $A_\mathfrak{p}$ è un campo.

Soluzione. i) Supponiamo che A sia ridotto. Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo e $\frac{a}{s}$ un elemento nilpotente di $A_\mathfrak{p}$. Allora $\frac{a^n}{s^n} = 0$ per qualche $n > 0$ e quindi esiste $t \notin \mathfrak{p}$ tale che $ta^n = 0$ in A. Allora $(ta)^n = 0$ e $ta = 0$ dato che A è ridotto. Da cui segue che $\frac{a}{s} = 0$ e quindi che $A_\mathfrak{p}$ è ridotto.

Viceversa Supponiamo che $A_\mathfrak{p}$ sia ridotto per ogni primo $\mathfrak{p} \subset A$. Sia $a \in A$ tale che $a^n = 0$. Sia $\mathfrak{p} \subset A$ un primo, allora $\left(\frac{a}{1}\right)^n = 0$ in $A_\mathfrak{p}$. Dato che $A_\mathfrak{p}$ è ridotto allora $\frac{a}{1} = 0$ e quindi esiste $s \notin \mathfrak{p}$ tale che $sa = 0$ in A. Se allora consideriamo l'ideale $I = (0 : a) = \{s \in A \mid sa = 0\}$ si ha che $I \not\subset \mathfrak{p}$ (per ogni $\mathfrak{p}$) e quindi $I = A$. Da questo segue che $1 \in I$ e quindi che $a = 0$ e A è ridotto.
ii) Dal primo punto segue che se A è ridotto allora per ogni primo minimale $A_\mathfrak{p}$ è ridotto. Dato che $\mathfrak{p}$ è minimale si ha che l'unico primo di $A_\mathfrak{p}$ è $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ e quindi $\mathfrak{N}(A_\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_\mathfrak{p} = 0$, allora 0 è l'unico massimale di $A_\mathfrak{p}$ che quindi è un campo.

Esercizio 4. Sia M il gruppo abeliano generato da elementi m_1, m_2 e m_3 che soddisfano le relazioni $3m_1+m_3 = 0$, $2m_1 - 2m_2 + m_3 = 0$ e $m_1 + 4m_2 + 2m_3 = 0$. Trovare i possibili ordini degli elementi di M.
Soluzione La matrice delle relazioni tra gli elementi di M è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

e ha forma di Smith

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

Quindi $M \cong \mathbb{Z}/14$ e i possibili ordini degli elementi di M sono 1,2, 7 e 14.

Esercizio 5. Sia $I = (t^2 - x, t^3 - y, t^4 - z) \subset \mathbb{C}[x, y, z, t]$. Calcolare $I_1 = I \cap \mathbb{C}[x, y]$. Ogni elemento di $V(I_1) \subset \mathbb{C}^2$ si "estende" ad un elemento di $V(I) \subset \mathbb{C}^4$?

Soluzione Per calcolare I_1 usiamo l'ordinamento lessicografico con $z > t > x > y$. La base di Gröbner ridotta di I rispetto a questo ordinamento è

$$G = (z - x^2, t^2 - x, tx - y, ty - x^2, x^3 - y^2)$$

e quindi $I_1 = G \cap \mathbb{C}[x, y] = (x^3 - y^2)$. Dato che G contiene polinomi monici in t e z il teorema di estensione garantisce che ogni elemento di $V(I_1)$ si "estende" ad un elemento di $V(I)$.