**Algebra II - 3 Settembre 2015**

**Esercizio 1.** Siano $I, J, K_1, .., K_n \subset A$ ideali. Provare che:

i) $(I + J)(I \cap J) \subset IJ$

ii) se $I+K_i = A$ per ogni $1 \leq i \leq n$ allora si ha $I+K_1K_2...K_n = A$.

iii) Un elemento $a \in A$ non è divisore di zero in $A/I$ se e solo se $I : (a) = I$.

**Esercizio 2.** Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera (e in tal caso provarla) o se è falsa (e in tal caso fornire un controesempio):

i) Siano $A$ e $B$ $C$–algebre. Se $A$ e $B$ sono domini allora $A \otimes_C B$ è 0 o è un dominio.

ii) Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale e sia $\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{m}$. Si ha che $a \in A^*$ se e solo se $\pi(a) \in (A/\mathfrak{m})^*$.

iii) Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello noetheriano locale. Se le immagini di elementi $a_1, .., a_n \in A$ generano $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ come spazio vettoriale, allora $\mathfrak{m} = (a_1, .., a_n)$.

**Esercizio 3.** Sia $A$ un anello. Provare che:

i) $A$ è ridotto se e solo se per ogni primo $\mathfrak{p} \subset A$, $A_\mathfrak{p}$ è ridotto.

ii) Se $A$ è ridotto allora per ogni primo minimale $\mathfrak{p} \subset A$, $A_\mathfrak{p}$ è un campo.

**Esercizio 4.** Sia $M$ il gruppo abeliano generato da elementi $m_1, m_2$ e $m_3$ che soddisfano le relazioni $3m_1 + m_3 = 0$, $2m_1 - 2m_2 + m_3 = 0$ e $m_1 + 4m_2 + 2m_3 = 0$. Trovare i possibili ordini degli elementi di $M$.

**Esercizio 5.** Sia $I = (t^2 - x, t^3 - y, t^4 - z) \subset \mathbb{C}[x, y, z, t]$. Calcolare $I_1 = I \cap \mathbb{C}[x, y]$. Ogni elemento di $V(I_1) \subset \mathbb{C}^2$ si "estende" ad un elemento di $V(I) \subset \mathbb{C}^4$ ?