Algebra II - 13 Gennaio 2015

Esercizio 1. Sia M un A-modulo tale che $\mathfrak{m}M \neq M$ per ogni ideale massimale $\mathfrak{m} \subset A$. Provare che:

1. Per ogni ideale (proprio) $I \subset A$ si ha $M/IM \neq 0$.
2. Se M è piatto allora per ogni A-modulo $N \neq 0$, $M \otimes N \neq 0$.

Esercizio 2. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera e quale è falsa. Provare o dare un controesempio:

1. Se $I, J \subset A$ sono ideali $\sqrt{I : J} \subseteq \sqrt{I} : \sqrt{J}$?
2. Se esistono $I, J \subset A$ ideali massimali tali che $I \cap J = (0)$ allora A è artiniano?
3. Siano M, N A-moduli, con A dominio, indichiamo con $\mathrm{T}(M) = \{m \in M \mid \mathrm{Ann}(m) \neq 0\}$.

   Vale $\mathrm{T}(M \otimes N) = \mathrm{T}(M) \otimes \mathrm{T}(N)$?
4. Siano $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ e $I = (f, g)$.

   Vale $V_{\mathbb{C}}(I)$ è infinito $\Longleftrightarrow \gcd(f, g) \neq 1$?

Esercizio 3. Sia A un anello finito e $S \subset A$ un insieme moltiplicativamente chiuso. Sia $f : A \longrightarrow S^{-1}A$ l'omomorfismo canonico dato da $f(a) = \frac{a}{1}$. Provare che

1. Se f è iniettivo allora $A \cong S^{-1}A$.
2. f è un omomorfismo surgettivo.
3. Sia $A = \mathbb{Z}/(24)$ e $S = \{s \equiv 2^n \pmod{24} \mid n \in \mathbb{N}\}$ e sia $f : A \longrightarrow S^{-1}A$. Trovare $\mathrm{Ker}(f)$ e $S^{-1}A$.

Esercizio 4. Dato il sistema di equazioni polinomiali :

$$\begin{cases} x + y &= a \\ x^2 + y^2 &= a^2 \\ x^3 + y^3 &= a^5 \end{cases}$$

determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{C}$ esistono soluzioni in $\mathbb{C}^2$ e in tal caso calcolarle.