Algebra II
4 Settembre 2013
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. Sia A un anello tale che tutti i divisori di zero appartengono al radicale di Jacobson $\mathfrak{J}(A)$. Provare che se $a, b, \in A$ e $(a) = (b)$ allora a e b sono associati.

Soluzione Possiamo suporre $a, b \neq 0$. Se $(a) = (b)$ allora esistono $x, y \in A$ tali che $a = xb$ e $b = ya$, da cui $a(1 - xy) = 0$, quindi $(1 - xy) \in \mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{J}(A)$. Quindi xy è invertibile e la tesi segue.

Esercizio 2. Sia A un anello noetheriano e $\varphi : A \longrightarrow A$ un omomorfismo surgettivo.

i) Provare che che φ è iniettivo

ii) Provare che per ogni coppia di ideali $I, J \subset A$, vale $\varphi(I \cap J) = \varphi(I) \cap \varphi(J)$.

iii) Le affermazioni (i) e/o (ii) sono vere se A non è noetheriano? (giustificare le risposte).

Soluzione i) Consideriamo gli ideali $K_i = Ker(\varphi^i)$. Dato che A è noetheriano la catena di ideali ideal $K_1 \subset K_2 \subset ...K_n...$si stabilizza ed esiste un n tale che $K_n = K_{n+1}$. Sia $a \in K_1$ vogliamo provare che $a = 0$. Dato che φ è surgettivo (e quindi anche φ^n) esiste $b \in A$ tale che $\varphi^n(b) = a$, da cui $\varphi(a) = \varphi^{n+1}(b) = 0$ ossia $b \in K_{n+1} = K_n$ e $a = 0$.
ii) Notiamo che se φ è surgettivo allora perogni ideale $I \subset A$, $\varphi(I)$ è un ideale di A. Dato che $\varphi(I \cap J) \subset \varphi(I) \cap \varphi(J)$ basta provare l'altra inclusione. Sia $a \in \varphi(I) \cap \varphi(J)$, allora $a = \varphi(i) = \varphi(j)$ con $i \in I$ e $j \in J$. Da questo

segue $0 = \varphi(i-j)$ e quindi $i = j$, dato che φ è iniettiva si ha la tesi.
iii) Se A non e' noetheriano entrambe le affermazioni sono false. Consideriamo $A = k[x_1, x_2, ...]$ l'anello dei polinomi in infinite variabili e sia φ data da $\varphi(x_1) = 0$, $\varphi(x_i) = x_{i-1}$ per $i > 1$. φ é surgettiva ma non iniettiva. Siano $I = (x_1 + x_2)$ e $J = (x_2)$. Dato che I, J sono principali e generati da elementi relativamente primi, $I \cap J = IJ$ inoltre dato che φ e' surgettiva $\varphi(I) = (\varphi(I))$, quindi $\varphi(I \cap J) = (\varphi(x_1 + x_2)\varphi(x_2)) = ({x_1}^2)$ mentre $\varphi(I) \cap \varphi(J) = (x_1)$.

Esercizio 3. Sia $V = \{\alpha_1, .., \alpha_m\} \subset \mathbb{C}^n$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$ e sia $A = \mathbb{C}[x_1, .., x_n]/I(V)$. Provare che:

i) Esistono m elementi $e_{\alpha_1}, ..., e_{\alpha_m} \in A$, $e_{\alpha_i} \neq 0$ tali che $e_{\alpha_i}^2 = e_{\alpha_i}$, $e_{\alpha_i}e_{\alpha_j} = 0$ se $i \neq j$ e $\sum_i e_{\alpha_i} = 1$

ii) Quali e quanti sono gli idempotenti di A? (un elemento $a \in A$ è idempotente se $a^2 = a$).

Soluzione i) Se $\alpha_i = (\alpha_{i1}, ...\alpha_{in})$, $I(V) = \cap \mathfrak{m}_{\alpha_i}$ con $\mathfrak{m}_{\alpha_i} = (x_1 - \alpha_{i1}, ..., x_n - \alpha_{in})$. Dato che $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$ gli $\mathfrak{m}_{\alpha_i}$ sono a due a due comassimali quindi per il teorema cinese del resto $A \cong \oplus \mathbb{C}^m$. Si verifica facilmente che gli $\alpha_i \in A$ immagini dei vettori $(0, .., 1, ..0) \in \mathbb{C}^m$ sono gli idempotenti cercati.
ii) Se $e = \sum_{k \in K} e_{\alpha_k}$ con $K \subset \{i, .., m\}$ allora e è idempotente. Viceversa se $e^2 = e$ allora $e(e-1) = 0$ da cui per ogni $\alpha \in V$ si ha $e(e-1) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}_\alpha}$. Se $i_1, .., i_k$ sono gli indici tali che $e \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}_{\alpha_{i_j}}}$ allora $e = \sum e_{\alpha_{i_j}}$ e questa soluzione é unica. Quindi esistono esattamente 2^m idempotenti.

Esercizio 4. Sia $A = \mathbb{Q}[x, y, z]$ e sia M l'A-modulo Sia $M = A/(xyz - z^2, xy^2 - 4) \otimes_A A/(yz, x - y^2)$.

i) Calcolare la dimensione di M come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

ii) Trovare gli ideali primi $\mathfrak{p} \subset A$ tali che l'A-modulo $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, (giustificare la risposta).

Soluzione i) Per le proprietà del prodotto tensoriale

$$M \cong A/(xyz - z^2, xy^2 - 4, yz, x - y^2) =$$

$$A/(x - y^2, y^4 - 4, z)$$

quindi M ha dimensione 4.
ii)M è un A modulo finitamente generato (da $\bar{1}$) quindi $S^{-1}M = 0$ se e solo se $S \cap I \neq \emptyset$, cosí affinche' $S^{-1}M \neq 0$, si deve avere $S = A \setminus \mathfrak{p} \subset A \setminus I$ ossia $\mathfrak{p} \supset I$. Dato che $I = (x-y^2, y^4-4, z) = (x-2, y^2-2, z) \cap (x+2, y^2+2, z) = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ è intersezione di massimali, gli unici primi $\mathfrak{p} \supset I$ sono $\mathfrak{p}_1$ e $\mathfrak{p}_2$.