

## Algebra II – 19 Settembre 2013

**Esercizio 1.** Sia  $M$  lo  $\mathbb{Z}$ -modulo generato dagli elementi  $m_1, m_2, m_3$  che soddisfano le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} 2m_1 - 4m_2 - 2m_3 = 0 \\ 10m_1 - 6m_2 + 4m_3 = 0, a \in \mathbb{Z} \\ 6m_1 - 12m_2 + am_3 = 0 \end{cases}$$

Rappresentare  $M$  come somma diretta di moduli ciclici al variare di  $a \in \mathbb{Z}$ . Se esistono, trovare per quali valori di  $a$ ,  $\text{Ann}(M) = 0$ .

**Esercizio 2.** Sia  $(A, \mathfrak{m})$  un anello commutativo locale e sia  $M \neq 0$  un  $A$ -modulo finitamente generato. Provare che  $\text{Hom}_A(M, A/\mathfrak{m}) \neq 0$ .

**Esercizio 3.**

Sia  $A$  un anello e  $0 \neq a \in A$ . Provare che sono fatti equivalenti:

- i)  $(a) = (a^2)$ ,
- ii)  $(a)$  è addendo diretto di  $A$ ,
- iii)  $A/(a)$  è un  $A$  modulo piatto.

**Esercizio 4.** Trovare i primi associati minimali dell'ideale  $I = (x^2zt, yt^3, xyz, x^5z^6) \subset K[x, y, z, t]$ .