Algebra II
10 Gennaio 2014

Esercizio 1: Sia A un anello commutativo con identita', $I \subset A$ un ideale. Provare che se un elemento $g \in A$ è tale che $(I : g^m) = (I : g^{m+1})$ allora:

i) $\forall s \geq 1, (I : g^m) = (I : g^{m+s})$

ii) $I = (I : g^m) \cap (I, g^m)$.

Esercizio 2. Un A modulo M si dice irriducibile se $M \neq 0$ e se 0 e M sono i soli sottomoduli di M.

i) Provare che un A modulo M è irriducibile se e solo se $M \neq 0$ e $\forall\ 0 \neq m \in M$ si ha $< m >= M$.

ii) Determinare tutti gli $\mathbb{Z}$-moduli irriducibili.

iii) Sia $\psi : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow M$ un omomorfismo surgettivo di $\mathbb{Z}$-moduli. Supponiamo che $Ker(\psi) =< m_1, m_2, m_3 >$, dove $m_1 = (2, 4, 6)$, $m_2 = (0, a, 2a), m_3 = (b, 4, 6)$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Trovare, se esistono, $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che lo $\mathbb{Z}$-modulo M è irriducibile.

Esercizio 3: Dato il polinomio $p(x) = (x-1)^2(x^2+2) \in \mathbb{Q}[x]$, sia $S = \{q(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid \gcd(q(x), p(x)) = 1\}$.

i) Provare che S è moltiplicativamente chiuso;

ii) Se $A = S^{-1}\mathbb{Q}[x]$, provare che $\#Spec(A) = 3$;

iii) Per ogni $\mathfrak{m} \in Spec(A)$ descrivere $A/\mathfrak{m}$;

iv) Se $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \subset A$ sono ideali massimali, calcolare $A/\mathfrak{m}_1 \otimes_A A/\mathfrak{m}_2$.

Esercizio 4: Sia $I = (x^2+y^2+z^2-2, y^2-z^2+1, xz-1) \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$.

i) Provare che $W = \mathbb{Q}[x, y, z]/I$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita.

ii) Trovare una base $\mathfrak{B}$ di W e le coordinate, rispetto a $\mathfrak{B}$, del polinomio $p = x^2 + y^2z + 2y + 1$.

iii) E' vero che $dim_{\mathbb{Q}} W = \#V_{\mathbb{C}}(I)$? (Giustificare la risposta).