Algebra II- Traccia delle soluzioni
9 Gennaio 2013

Esercizio 1. Sia $\phi : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$ l'omomorfismo definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

con $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Provare che :

i) $coker(\phi)$ e' ciclico se e solo se $\gcd(a, b) = 1$

ii) $coker(\phi)$ ha al piu' due generatori se e solo se $\gcd(a, b, c) = 1$.

Soluzione Se $\Delta_1 = \gcd(a, b, c)$, $\Delta_2 = \gcd(a^2, ab, b^2 - ac)$ e $\Delta_3 = a^3$ la forma di Smith della matrice data e' :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

.

dove i d_i sono dati da: $d_1 = \Delta_1$, $d_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$ $d_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}$, e $d_1|d_2|d_3$ da cui $coker(\phi) \cong \mathbb{Z}/(d_1) \oplus \mathbb{Z}/(d_2) \oplus \mathbb{Z}/(d_3)$.

(ii) Dalle proprieta' dei d_i segue immediatamente che $coker(\phi)$ ha al piu' due generatori se e solo se $d_1 = \gcd(a, b, c) = 1$.

(i) Se $\gcd(a, b) = 1$ allora $\gcd(a^2, ab) = a$, e cosi' si ha che $d_1 = 1$,

$d_2 = \gcd(a^2, ab, b^2 - ac) = \gcd(a, b^2) = 1$ e quindi $coker(\phi)$ e' ciclico. Se viceversa $coker(\phi)$ e' ciclico innanzitutto da $d_1|d_2|d_3$ otteniamo che $d_1 = d_2 = 1$. Se $k = \gcd(a, b)$ si ha che $k|\gcd(a^2, ab, b^2 - ac) = d_2 = 1$ e quindi $k = 1$.

Esercizio 2. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false. Giustificare le risposte o dare un controesempio.

i) Sia A un anello e $I \subset A$ un ideale. Un elemento $a \in A$ e' non divisore di zero in A/I se e solo se $(I : a) = I$.

ii) Se e' A un dominio e Q il suo campo dei quozienti, allora

$$Q[x] \otimes_{A[x]} Q[x] \cong Q[x].$$

Soluzione (i) Vera. $a \in A$ non e' divisore di zero in $A/I \iff b \in A$ e $ab \equiv 0 \pmod{I} \implies b \equiv 0 \pmod{I} \iff b \in A$ e $ab \in I \implies b \in I$ $\iff b \in (I : a) \implies b \in I$ e quindi dato che $I \subseteq (I : a)$ la tesi.

(ii) Vera. Basta osservare che se $p \in Q[x]$ esiste $0 \neq d \in A$ tale che $dp = p' \in A[x]$ quindi se $p, q \in Q[x]$, $p \otimes q = \frac{p'}{d} \otimes q\frac{d}{d} = 1 \otimes pq$.

Esercizio 3. Siano

$$I = (x - y + z^2, y - z - 1, z^3) \;\text{ e }\; J = (x^2 - z - 1, y^2 + z - 1, z(z-1))$$

ideali in $\mathbb{C}[x, y, z]$ provare che $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$.

Soluzione Si ha che $I \subset (x-1, y-1, z) \subset \sqrt{I}$, poiche' $(x-1, y-1, z)$ e' massimale $(x-1, y-1, z) = \sqrt{I}$. Poiche' $V(I) = \{(1, 1, 0)\} \subset V(J)$ allora $I(V(J)) = \sqrt{J} \subset I(V(I)) = \sqrt{I}$.

Esercizio 4. Sia $I = (x^2 + 2y^2 - 3, x^2 + xy + y^2 - 3) \subset \mathbb{C}[x, y]$.

a) Calcolare $I \cap \mathbb{C}[y]$.

b) Siano $\mathfrak{p}_1 = (x-1, y-1)$ e $\mathfrak{p}_2 = (x, y)$, descrivere $I_{\mathfrak{p}_1} \cap \mathbb{C}[x, y]$ e $I_{\mathfrak{p}_2} \cap \mathbb{C}[x, y]$.

Soluzione. i) La base di Gröbner di I rispetto all'ordinamento lessicografico con $x > y$ e' data da $(x^2+2y^2-3, xy-y^2, y^3-y)$, quindi $I \cap \mathbb{C}[y] = (y^3-y)$.

ii) Dato che $I = (x^2-3, y) \cap (x-1, y-1) \cap (x+1, y+1) \subset \mathfrak{p}_1$, $I_{\mathfrak{p}_1} \cap \mathbb{C}[x, y] \neq (1)$. Si ha che $y^3 - y = (y^2 + y)(y - 1)$ e $y^2 + y$ e' invertibile in $I_{\mathfrak{p}_1}$ quindi l'deale $I_{\mathfrak{p}_1} \cap \mathbb{C}[x, y]$ contiene $y - 1$ e $I_{\mathfrak{p}_1} \cap \mathbb{C}[x, y] = \mathfrak{p}_1$.

Invece $I \not\subset (x, y)$ cosi' $I_{\mathfrak{p}_2} \cap \mathbb{C}[x, y] = (1)$.