Algebra II- Traccia delle soluzioni
6 Febbraio 2013

Esercizio 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x]^4 \to \mathbb{Q}[x]^4$ l'omomorfismo dato da

$\phi(a,b,c,d) = (a+3c, b+2xc+3d, (x^2-x)(a+3c)+2xd, (x^2-x)(b+3d))$.

Trovare la dimensione su $\mathbb{Q}$ di $coker(\phi)$.

Soluzione

La forma di Smith della matrice associata a ϕ (rispetto alle basi canoniche) e' :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2(x-1) \end{pmatrix}$$

.

da cui $coker(\phi) \cong \mathbb{Q}[x]/(x) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x^2) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x-1) \cong \mathbb{Q} \oplus < 1, x > \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ e $\dim_{\mathbb{Q}} coker(\phi) = 4$.

Oppure: Se d_1, d_2, d_3, d_4 sono i divisori elementari nella forma di Smith della matrice M che rappresenta ϕ si ha che $coker(\phi) \cong \oplus_i \mathbb{Q}[x]/(d_i)$. Quindi $\dim_{\mathbb{C}} coker(\phi) = \sum \deg(d_i) = \deg \det(M)$.

Esercizio 2. Sia A un anello commutativo con identita' e siano $I, J \subset A$ ideali, provare che:

a) se I e' primario e $J \not\subset \sqrt{I}$ allora $\sqrt{I : J^i} = \sqrt{I}$, $\forall i \geq 1$.

b) se $I = \sqrt{I}$ e $h \notin I$ allora $I : (h)$ e' radicale .

Soluzione a) $\sqrt{I} \subset \sqrt{I : J^i}$, quindi basta provare l'altra inclusione. Dato che $J \not\subset \sqrt{J}$ esiste $j \in J$ tale che $\forall i \geq 0$ $j^i \not\!\!\ in I$. Sia quindi $a \in \sqrt{I : J^i}$ allora $a^n j^i \in I$ e quindi, dato che I e' rimario, $a \in \sqrt{I}$.

b) Sia $a \in \sqrt{I : (h)}$, allora $a^n h \in I$ e $(ah)^n \in I = \sqrt{I}$ e quindi $a \in I : (h)$.

Esercizio 3. Sia A un anello, $\mathfrak{D}(A)$ l'insieme dei divisori di zero di A . Se $S = A \setminus D(A)$, $Q(A) = S^{-1}A$ Provare che:

a) S e' il piu' grande si moltiplicativo tale che $\phi : A \longrightarrow S^{-1}A$ e' iniettiva.

b) Se A tale che per ogni $a \in A$ vale $a \notin A^* \Longrightarrow a \in \mathfrak{D}(A)$ allora $\phi : A \longrightarrow S^{-1}A$ e' bigettiva.

c) Sia $A = B/(\mathfrak{p}_1 \cap .. \cap \mathfrak{p}_n)$, con B dominio e $\mathfrak{p}_i$ ideali primi tali che $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ se $i \neq j$, provare che $Q(A) \cong \oplus Q(B/\mathfrak{p}_i)$

d) Sia $A = \mathbb{C}[x, y]/(xy)$, $S = A \setminus \mathfrak{D}(A)$ e , trovare $S^{-1}A$.

Soluzione a) Sia $a \in A$ tale che $\phi(a) = 0$ allora esiste $s \in s$ tale che $as = 0$, dato che $s \notin \mathfrak{D}(A)$ $a = 0$. Se d'altra parte $T \supset S$ allora T contiene un divisore di zero e quindi ϕ non puo' essere iniettiva.

b) Se $\phi(b) = \frac{b}{1} = \frac{a}{s}$ allora $u(a - bs) = 0$, dato che $u, s \in A^*$ si ha $b = s^{-1}a \in A$.

c) Si ha $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{p}_1 A \cup .. \cup \mathfrak{p}_n A$, quindi se $S = A \setminus \mathfrak{p}_1 A \cup .. \cup \mathfrak{p}_n A$ $Q(A) = S^{-1}A$. Gli ideali massimali di $Q(A)$ sono esattamente gli ideali $S^{-1}\mathfrak{p}_i A$, $i = 1, .., n$. Per il teorema cinese del resto allora $S^{-1}A \cong \oplus S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p}_i A \cong \oplus S^{-1}(A/\mathfrak{p}_i A)$. Per la massimalita' di $S^{-1}(\mathfrak{p}_i A)$ si ha che $S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p}_i A = S^{-1}(A/\mathfrak{p}_i A)$ e' un campo e quindi $S^{-1}(A/\mathfrak{p}_i A) = Q(A/\mathfrak{p}_i A)$. Dato che $A/\mathfrak{p}_i A \cong B/\mathfrak{p}_i$,$Q(A/\mathfrak{p}_i A) \cong Q(B/\mathfrak{p}_i)$ allora $Q(A) \cong \oplus Q(B/\mathfrak{p}_i)$.

d)$\mathfrak{D}(A) = (x) \cup (y)$ quindi per il punto c), $S^{-1}A = \mathbb{C}(x) \oplus \mathbb{C}(y)$.

Esercizio 4. Sia $I = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x + y + z - 1) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$.

a) Calcolare $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y, z]/I$ e $\dim_{\mathbb{C}(z)} \mathbb{C}[x, y, z]/I$

b) Calcolare $V(I) \cap V(z - 1)$.

Soluzione. a) la base di groebner di I e' $(x + y + z - 1, y^2 + yz - y + z^2 - z)$. quindi $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y, z]/I$ e' infinita, mentre $\dim_{\mathbb{C}(z)} \mathbb{C}[x, y, z]/I = 2$.

b) $V(I) \cap V(z-1) = V(I, z-1)$. Dato che $(x+y+z-1, y^2+yz-y+z^2-z, z-1) = (x+y, y^2, z-1)$, $V(I) \cap V(z-1) = \{(0, 0, 1)\}$.