Algebra II
6 Febbraio 2013

Esercizio 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x]^4 \to \mathbb{Q}[x]^4$ l'omomorfismo dato da $\phi(a,b,c,d) = (a+3c, b+2xc+3d, (x^2-x)(a+3c)+2xd, (x^2-x)(b+3d))$.

Trovare la dimensione su $\mathbb{Q}$ di $coker(\phi)$.

Esercizio 2. Sia A un anello commutativo con identita' e siano $I, J \subset A$ ideali, provare che:

a) se I e' primario e $J \not\subset \sqrt{I}$ allora $\sqrt{I : J^i} = \sqrt{I}$, $\forall i \geq 1$.

b) se $I = \sqrt{I}$ e $h \notin I$ allora $I : (h)$ e' radicale .

Esercizio 3. Sia A un anello, $\mathfrak{D}(A)$ l'insieme dei divisori di zero di A . Se $S = A \setminus \mathfrak{D}(A)$, $Q(A) = S^{-1}A$ Provare che:

a) S e' il piu' grande si moltiplicativo tale che $\phi : A \longrightarrow S^{-1}A$ e' iniettiva.

b) Se A tale che per ogni $a \in A$ vale $a \notin A^* \Longrightarrow a \in \mathfrak{D}(A)$ allora $\phi : A \longrightarrow S^{-1}A$ e' bigettiva.

c) Se $A = B/(\mathfrak{p}_1 \cap .. \cap \mathfrak{p}_n)$, con B dominio e $\mathfrak{p}_i$ ideali primi tali che $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ se $i \neq j$, allora $Q(A) \cong \oplus_i Q(B/\mathfrak{p}_i)$

d) Sia $A = \mathbb{C}[x,y]/(xy)$, descrivere $Q(A)$.

Esercizio 4. Sia $I = (x^2+y^2+z^2-1, x+y+z-1) \subset \mathbb{C}[x,y,z]$.

a) Calcolare $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x,y,z]/I$ e $\dim_{\mathbb{C}(z)} \mathbb{C}[x,y,z]/I$

b) Calcolare $V(I) \cap V(z-1)$.