Algebra II
19 Settembre 2011

Esercizio 1. Consideriamo l'omomorfismo $\phi_a : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^3$ dato da $\phi(x, y, z) = (2x + 8z, 2x + 4y + 6z, ax + 6y + 4z)$, con $a \in \mathbb{Z}$. Determinare la classe di isomorfismo di coker(ϕ) in funzione di a.

Soluzione. La matrice che rappresenta l'omomorfismo(rispetto alle basi canoniche) e':

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \\ a & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Con un passo di eliminazione (sottraendo alla terza colonna 4 volte la prima) la matrice diviene:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ a & 6 & 4(1-a) \end{pmatrix}$$

Distinguiamo i casi $a = 2k$ e $a = 2k + 1$. Se a e' pari riducendo ulteriormente, troviamo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 4(1-a) \end{pmatrix}$$

Otteniamo $d_1 = 2$, $d_2 = 2$ e $d_3 = -8a + 14 = 2(-4a + 7) =$. Quindi per $a = 2k$ si ha coker$(\phi) \cong \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/2(7 - 4a) \cong \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(7 - 4a)$.

Se $a = 2k + 1$,riducendo ulteriormente, troviamo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 4(1-a) \end{pmatrix}$$

$d_1 = 1$, $d_2 = 2$ e $d_3 = -16a + 28 = 4(-4a + 7)$. Da cui coker$(\phi) \cong \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/4(7 - 4a)) \cong \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(7 - 4a)$.

Esercizio 2. Decidere quali delle seguenti affermazioni e' vera e quale falsa. Provare se vera, dare un controesempio se falsa.

- a. Se A e' un dominio artiniano allora e' un campo
- b. Se A e' un PID allora $\mathfrak{J}(A) = (0)$.
- c. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ come $\mathbb{Z}$-moduli.

Soluzione a. Vero. Sia $0 \neq a \in A$. La successione $(a) \supseteq (a^2) \supseteq \ldots \supseteq (a^n)$ si stabilizza, quindi esiste k tale che $(a^k) = (a^{k+1})$. Allora esiste $b \in A$

tale che $a^k = ba^{k+1}$ e quindi, dato che A e' un dominio, $1 = ba$, ossia a e' invertibile.

b. Falso. Consideriamo $A = \mathbb{Z}_{(p)}$, con p primo. A e' PID, locale e $\mathfrak{J}(A) = (p)A \neq (0)$.

c. Vero. Consideriamo $\phi : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $\phi(x, y) = xy$. ϕ e' bilineare quindi induce un unico omomorfismo $\bar{\phi} : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{\phi}(x \otimes y) = xy$ che e' ovviamente surgettivo. Dato che $\frac{a}{b} \otimes y = \frac{a}{b} \otimes \frac{by}{b} = a \otimes \frac{y}{b} = 1 \otimes \frac{ay}{b}$, ogni elemento di $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ e' della forma $1 \otimes y$ con $y \in \mathbb{R}$. Se $\bar{\phi}(1 \otimes y) = 0$ allora $y = 0$, ossia $\bar{\phi}$ e' iniettivo.

Esercizio 3. Siano $N \subset M$, $N' \subset M'$ A-moduli, tali che $M/N \cong M'/N' \cong A$. Provare che:

a. La successione $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$ spezza.

b. Se $N \cong N'$ allora $M \cong M'$.

Soluzione a. Per ipotesi si ha: $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \cong A \longrightarrow 0$. Dato che A e' libero, A e' proiettivo, quindi la successione spezza.

b. Dal punto a. segue che $M \cong N \oplus M/N$ e $M' \cong N' \oplus M'/N'$. Dato che $N \cong N'$ si ha anche $M \cong M'$.

Esercizio 4. Sia $I = (xy^2 - z, xyz - 1, xz - y) \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$.

a. Provare che $I = \sqrt{I}$

b. Trovare i divisori di zero in $\mathbb{Q}[x, y, z]/I$

c. Se $f = x^5 + yz^2 - z^5$ provare che $V(I, f) = \emptyset$.

Soluzione a. La base di Groebner ridotta di I, rispetto all'ordinamento lessicografico con $x > y > z$, e' $(x - z, y - z^2, z^4 - 1)$.

Considerando la fattorizzazione $z^4 - 1 = (z + 1)(z - 1)(z^2 + 1)$ si ha che $I = (I, z+1) \cap (I, z-1) \cap (I, z^2+1) = (x+1, y-1, z+1) \cap (x-1, y-1, z-1) \cap (x - z, y + 1, z^2 + 1) = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3$. $\mathfrak{m}_1$ e $\mathfrak{m}_2$ e $\mathfrak{m}_3$ sono massimali ($\mathbb{Q}[x, y, z]/\mathfrak{m}_3 \cong \mathbb{Q}(i)$) cosi' $I = \sqrt{I}$.

b. Dal punto precedente segue che i divisori di zero sono $\mathfrak{m}_1/I \cup \mathfrak{m}_2/I \cup \mathfrak{m}_3/I = (x+1, y-1, z+1)/I \cup (x-1, y-1, z-1)/I \cup (y+1, z^2+1)/I = (z+1)/I \cup (z-1)/I \cup (z^2+1)/I$, dato che $x+1 \equiv z+1 \pmod I$, $x-1 \equiv z-1 \pmod I$, $y - 1 \equiv z^2 - 1 \pmod I$ e $y + 1 \equiv z^2 + 1 \pmod I$.

c.Riducendo f rispetto alla base di Groebner trovata, si ottiene che $f = 1 + h$ con $h \in I$, quindi $V(I, f) = V(1) = \emptyset$