Algebra II
15 Giugno 2011
Traccia delle soluzioni

Esercizio 1: Sia $A = K[x,y]/(y^3 - xy^2 - y + x, x^2 - xy + x - y)$.

(i) Provare che A e' finitamente generato come $K[x]$ modulo.

(ii) Rappresentare A come il conucleo di un omomorfismo di $K[x]$ moduli e decomporlo come prodotto diretto di moduli ciclici.

Soluzione A e' generato come $K[x]$ modulo da $1, y, y^2$. Indicato con $B = K[x,y]/(y^3 - xy^2 - y + x)$ si ha che B e' un $K[x]$ modulo libero di rango 3. Sia $f : K[x]^3 \longrightarrow B$ l'omomorfismo (di $K[x]$ moduli) dato da: $f(e_1) = x^2 - xy + x - y = h$, $f(e_2) = yh$ e$f(e_3) = y^2h$ si ha che $Im(f) =< h, yh, y^2h > B$ ossia $(x^2 - xy + x - y) = Im(f)$. Da questo deduciamo che $A \cong B/Im(f) = coker f$. La matrice che rappresenta f (rispetto alla base $1, y, y^2$ e' data da:

$$\begin{pmatrix} x^2+x & 0 & x^2+x \\ -x-1 & x^2+x & -x-1 \\ 0 & -x-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riducendo in forma di Smith otteniamo che $d_1 = d_2 = x + 1$ e $d_3 = 0$ quindi $A \cong K \oplus K \oplus K[x]$.

Esercizio 2: Sia A un anello locale, con ideale massimale principale $\mathfrak{m} = (m)$. Provare che:

(i) Ogni elemento $0 \neq a \in \mathfrak{m}$ ha una fattorizzazione della forma $a = um^k$, con u invertibile se e solo se $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}^n = (0)$

(ii) Se $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}^n = (0)$ e $I \subset A$ e' un ideale proprio di A allora $I = \mathfrak{m}^k$.

(iii) Se A e' noetheriano allora A e' a ideali principali.

Soluzione (i) Supponiamo che ogni elemento $0 \neq a \in \mathfrak{m}$ si fattorizzi come $a = um^k$, con u invertibile. Supponiamo che esista $0 \neq a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}^n$. Allora $a \in \mathfrak{m}^n$ per ogni n. In particolare $a \in \mathfrak{m}$ quindi $a = um^k$ con u invertibile. Si ha cosi'

$$\mathfrak{m}^k \subset (a) \subset \mathfrak{m}^s \subset \mathfrak{m}^k$$

per ogni $s > k$. Da $\mathfrak{m}^k = \mathfrak{m}^s$ segue che $m^k = bm^s$ da cui $m^k(1-bm^{s-k}) = 0$ e dato che $1 - bm^{s-k}$ e' invertibile $m^k = 0$ e $a = 0$, contro le ipotesi.

Viceversa se $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}^n = (0)$ e $0 \neq a \in \mathfrak{m}$ sia k il massimo esponente tale che $a \in \mathfrak{m}^k$. Allora $a = bm^k$ e $b \notin \mathfrak{m}$, dato che A e' locale b e' invertibile.

(ii) Se I e' proprio allora $I \subset \mathfrak{m}$ e per (i) ogni elemento $a \in I$ si scrive come $a = um^k$ con u invertibile. Se n il minimo esponente per cui $um^n \in I$, allora $I \subset \mathfrak{m}^n$. Inoltre se $a = um^n \in I$, dato che u e' invertibile si ha $m^n = u^{-1}a \in I$ da cui $I = \mathfrak{m}^n$.

(iii) Per (ii) e' sufficiente provare che se A e' noetheriano vale una delle due condizioni equivalenti di (i). Sia $0 \neq a \in \mathfrak{m}$, $a = b_1 m$ se b_1 non e' invertibile allora $b_1 = b_2 m \in \mathfrak{m}$, e $a = b_2 m^2$, dato che $(b_1) \subset (b_2)$ e A e' noetheriano esiste k tale che $a = b_k m^k$ e $(b_k) = (b_{k+1})$. Se b_k non e' invertibile, da $b_k = cb_{k+1} = cdb_k$, se cd non fosse invertibile allora $cd \in \mathfrak{m}$ e da $b_k(1 - cd) = 0$ si otterrebbe $b_k = 0$ e quindi $a = 0$ contro le ipotesi.

Esercizio 3: Siano A e B anelli e $f : A \longrightarrow B$ un omomorfismo piatto (i.e. tale che rende B un A modulo piatto). Se $I, J \subset A$ sono ideali, provare che $(I \cap J)B = IB \cap JB$.

Soluzione Se I, J sono ideali di A si ha la successione esatta:

$$0 \longrightarrow I \cap J \longrightarrow I \oplus J \longrightarrow I + J \longrightarrow 0$$

tensorizzando com B che e' piatto, (dato che se I è un ideale $I \otimes_A B = IB$), otteniamo:

$$0 \longrightarrow (I \cap J) \otimes B \longrightarrow IB \oplus JB \longrightarrow IB + JB \longrightarrow 0$$

e quindi la tesi.

Esercizio 4: Sia $I = (x^2 z, y^2 z^2 - yz, y^2 - z^2) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$.

(i) $V(I)$ e' finito?

(ii) $I \subset (x^2, y + 1, z - 1)$?

Giustificare le risposte.

Soluzione (i) Dato che $(a, 0, 0) \in V(I)$ per ogni $a \in \mathbb{C}^3$, $V(I)$ non e' finito.

(ii) Se $I \subset (x^2, y + 1, z - 1)$ allora $V(x^2, y + 1, z - 1) = (0, -1, 1) \subset V(I)$. Dato che $(y^2 z^2 - yz)(0, -1, 1) = 2 \neq 0$ allora $I \not\subset (x^2, y + 1, z - 1)$.