

Algebra II
15 Giugno 2011

Esercizio 1: Sia $A = K[x, y]/(y^3 - xy^2 - y + x, x^2 - xy + x - y)$.

- (i) Provare che A e' finitamente generato come $K[x]$ modulo.
- (ii) Rappresentare A come il conucleo di un omomorfismo di $K[x]$ moduli e decomporlo come prodotto diretto di moduli ciclici.

Esercizio 2: Sia A un anello locale, con ideale massimale principale $\mathfrak{m} = (m)$.
Provare che:

- (i) Ogni elemento $0 \neq a \in \mathfrak{m}$ ha una fattorizzazione della forma $a = um^k$, con u invertibile se e solo se $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n = (0)$
- (ii) Se $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n = (0)$ e $I \subset A$ e' un ideale proprio di A allora $I = \mathfrak{m}^k$.
- (iii) Se A e' noetheriano allora A e' a ideali principali.

Esercizio 3: Siano A e B anelli e $f : A \rightarrow B$ un omomorfismo piatto (i.e. tale che rende B un A modulo piatto). Se $I, J \subset A$ sono ideali, provare che $(I \cap J)B = IB \cap JB$.

Esercizio 4: Sia $I = (x^2z, y^2z^2 - yz, y^2 - z^2) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$.

- (i) $V(I)$ e' finito?
- (ii) $I \subset (x^2, y + 1, z - 1)$?

Giustificare le risposte.