Algebra II
15 Febbraio 2012

1. Sia M la matrice a coefficienti interi:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Determinare la forma di Smith di M al variare di $a, b \in \mathbb{Z}$.

2. Dire quali delle seguenti affermazioni e' vera e quale e' falsa. Provare o dare un controesempio:

   (a) Siano M un A-modulo. Se per ogni primo $\mathfrak{p} \subset A$ il modulo $M_\mathfrak{p}$ e' privo di torsione allora M e' privo di torsione.

   (b) Siano A e B due anelli e $f : A \longrightarrow B$ un omomorfismo. Se M e' un A-modulo libero di rango k allora $M_B = M \otimes_A B$ e' un B-modulo libero di rango k.

   (c) Sia A un anello, $f \in A$, non nilpotente, e $I \subset A$ un ideale. E' vero che $\sqrt{I} = \sqrt{IA_f \cap A} \cap \sqrt{(I, f)}$?

3. Sia $f = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ e sia $A = \mathbb{R}[x]/(f)$.

   (a) Trovare i divisori di zero in A

   (b) Trovare $\mathfrak{N}(A)$, il nilradicale di A.

   (c) Trovare, se esistono, gli ideali primi $\mathfrak{p}$ di A tali che $\mathfrak{N}(A_\mathfrak{p}) \neq (0)$ e quelli per cui $A_\mathfrak{p}$ e' un dominio.

4. Sia $I = (x^3 + y^3 + z^3 + 1, x^2 + y^2 + z^2 + 1, x + y + z + 1) \subset \mathbb{Z}/(2)[x, y, z]$.

   (a) $V(I) \subset \overline{(\mathbb{Z}/(2))}^3$ e' finito?

   (b) Decomporre $V(I)$ come unione di varieta' irriducibili.