Algebra II
2 Marzo 2011

1. Sia M un A modulo artiniano e sia $u : M \longrightarrow M$ un omomorfismo iniettivo allora u è un isomorfismo.

   Soluzione Consideriamo la successione di A-moduli $Im(u) \supset Im(u^2) \supset .. \supset Im(u^n)...$ Dato che M è artiniano la successione è stazionaria e quindi esiste k tale che $Im(u^k) = Im(u^{k+1})$. Allora per ogni $m \in M$ esiste $n \in M$ tale che $u^k(m) = u^{k+1}(n)$ ossia $u^k(m - u(n)) = 0$, dato che u è iniettivo si ha la tesi.

2. Siano $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ polinomi senza fattori comuni. Provare che $V(f) \cap V(g)$ è un insieme finito.

   Soluzione Dato che i polinomi non hanno fattori comuni si ha che i risultanti $Ris_x(f, g) = r_x(y) \in \mathbb{C}[y]$ e $Ris_y(f, g) = r_y(x) \in \mathbb{C}[x]$ sono polinomi diversi da zero.Inoltre $r_x, r_y \in (f, g)$ quindi l'ideale (f, g) è zero dimensionale, ossia $V(f) \cap V(g) = V(f, g)$ è finito.

3. Sia K un campo e sia $A = K[x, y, z] \cong k[X, Y, Z]/(X^3, X^2Y, XZ)$.

   i) Determinare il nilradicale $\mathcal{N}(A)$ e descrivere $A/\mathcal{N}(A)$.

   ii) Determinare $\mathfrak{D}(A)$ l'insieme dei divisori di zero di A.

   iii) Sia $S = A \setminus \mathfrak{D}(A)$, descrivere $S^{-1}A$. è un anello locale?

   iv) Sia $\mathfrak{p} = (x, z) \subset A$. Provare che $\mathfrak{p}$ è primo e descrivere e $A_{\mathfrak{p}}$.

   Soluzione i) $\mathcal{N}(A) = (x)$. Infatti, I è un ideale monomiale e quindi è immediato ottenere la decomposizione $I = (X) \cap (X^2, Z) \cap (X^3, Y, Z)$, così $\sqrt{I} = (X)$. Da questo segue che $\mathcal{N}(A) = (x)$ e $A/\mathcal{N}(A) \cong K[Y, Z]$.

   ii) $\mathfrak{D}(A) = (x) \cup (x, z) \cup (x, y, z) = (x, y, z)$.

   iii) $S^{-1}A$ è locale, con ideale massimale $(x, y, z)S^{-1}A$. Inoltre da (ii) segue che $\varphi_S : A \longrightarrow S^{-1}A$ è iniettiva. Gli elementi di $S^{-1}A$ sono della forma $\frac{f}{g}$ con $f \in A$ e $g(0, 0, 0) \neq 0$. iv) $\mathfrak{p}$ è primo infatti $A/\mathfrak{p} \cong K[Y]$ che è un dominio.$A_{\mathfrak{p}}$ è locale. Inoltre dato che $x^2y = 0$ in $A_{\mathfrak{p}}$, $x^2 = 0$, $A_{\mathfrak{p}} \cong (K[X, Y, Z]/(X^2, XZ))_{(X,Z)}$ e gli elementi di $A_{\mathfrak{p}}$ sono della forma $\frac{f}{g}$ con $f = h(y) + xp(y) + zp(y, z)$ e $g(0, y, 0) \neq 0$.

4. Sia M una matrice intera $n \times n$ tale che posto

   $A = \mathbb{Z}^n/M\mathbb{Z}^n$ si abbia $\forall x \in A$ esista un primo p_x

   tale che $p_x x = 0$.

   Dimostrare che M è di rango n, e che esiste p primo tale che

   $\det(M) = \pm p^k$ con $k \leq n$.

   Soluzione. Sia $D = \mathrm{diag}(d_1, .., d_n)$ la forma di Smith di M. Sappiamo che $d_1 | d_2 \dots | d_n$. Se esiste $k \leq n$ tale che $d_1 = \dots = dn - k = 1$, allora $A = \mathbb{Z}^n/M\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}/(d_{n-k+1}) \oplus \ldots \mathbb{Z}/(d_n)$. Otteniamo allora immediatamente che $d_i \neq 0$ per ogni i. Infatti in caso contrario $\mathbb{Z}^h$ sarebbe un addendo diretto di A ed esisterebbero elementi che non soddisfano le ipotesi (in quanto $\mathbb{Z}^h$ è libero). Così $\operatorname{rank} M = n$. Siano ora $e_{n-k+1}, \ldots e_n$ i generatori di A, per ogni i si ha che esiste p_i primo tale che $p_i e_i = 0$ ossia $\operatorname{Ann}(e_i) = (d_i) \supset (p_i)$. Dato che p_i è primo, per ogni i si deve avere che $d_i = p_i$ e dalla condizione $d_i | d_{i+1}$ segue che per ogni j, $d_j = d_{n-k+1} = p_{n-k+1}$ da cui la tesi.

5. Sia $I \subseteq \mathbb{C}[x, y, z]$ l'ideale $(x + y + z, xy + yz + zx, xyz - 1)$.

   (a) Dimostrare che $V(I)$ è l'insieme delle permutazioni di $(1, \alpha, \alpha^2)$ con $\alpha = (-1 + i\sqrt{3})/2)$.

   (b) Dimostrare che I è radicale.

   soluzione. $G = (x+y+z, y^2+yz+z^2, z^3-1)$ è la base di Göbner ridotta do I rispetto all'ordinamento lessicografico $x > y > z$, quindi l'insieme delle 6 permutazioni di $(1, \alpha, \alpha^2)$ con $\alpha = (-1 + i\sqrt{3})/2$ appartiene a $V(I)$. Inoltre I ha dimensione 0 e $\#V(I) \leq 1\ 2\ 3 = 6$ da questo segue che $V(I) = 6$ e $I = I(V(I)) = I(V(\sqrt{I})) = \sqrt{I}$.