Algebra II – 3 Giugno 2010 - Traccia delle soluzioni

Esercizio 1. Sia $A = \mathbb{Q}[x]$e sia $f : A^3 \longrightarrow A^3$ l'applicazione lineare data da $f(a, b, c) = (ax + b(x + 1) + cx, a + c, b(x + 1) + c(x + 1))$ descrivere il conucleo di f come prodotto diretto di A-moduli ciclici.
Soluzione f e' rappresentata da una matrice che puo' essere ridotta in forma diagonale a $diag(1, 1 + x, 1 + x)$, quindi $coker f \cong \mathbb{Q}^2$

Esercizio 2. Sia A un dominio e siano $S_1 \subset S_2 \subset A$ due sottoinsiemi moltiplicativamente chiusi di A $(0 \notin S_2)$.

i) Provare che esiste un unico omomorfismo iniettivo φ di A-algebre $f : {S_1}^{-1}A \longrightarrow {S_2}^{-1}A$.

ii) Se $T = \{t \in S_2 \mid \exists s \in s_1 \; t.c. \; s \in (t)\}$ provare che φ e' un isomorfismo se e solo se $S_2 = T$.

Soluzione [i)] Poiche' $S_1 \subset S_2$ e' possibile definire $\varphi(\frac{a}{s_1}) = \frac{a}{s_1}$. φ e'un omomorfismo di A-algebre ed e' iniettivo, dato che $\varphi(\frac{a}{s_1}) = 0$ in ${s_2}^{-1}A$ se e solo se $a = 0$. Inoltre se f e' un altro omomorfismo iniettivo di A-algebre, si ha $f(\frac{a}{s}) = af(\frac{1}{s})$ e $1 = f(1) = f(\frac{s}{s}) = sf(\frac{1}{s})$ da cui $f(\frac{1}{s}) = \frac{1}{s}$ e $f = \varphi$.
[ii)] Per [i)]φ e' un isomorfismo se e solo se e' surgettivo, ossia se e solo se per ogni elemento $\frac{b}{s_2} \in {S_2}^{-1}A$ esiste $\frac{a}{s_1} \in {S_1}^{-1}A$ tale che $\varphi(\frac{a}{s_1} = \frac{b}{s_2}$ ossia se e solo se per ogni $s_2 \in S_2$ esiste $\frac{a}{s_1} \in {S_1}^{-1}A$ tale che $\varphi(\frac{a}{s_1} = \frac{1}{s_2}$ e questo equivale a dire che $as_2 = s_1$ ossia che $S_2 \subset T$.

Esercizio 3. Sia $I \subset \mathbb{Q}[x, y]$ l'ideale generato dal polinomio $xy^2 - 1$.

a. I e' primo?

b. I e' massimale?

c. Descrivere gli omomorfismi di anello $f : \mathbb{Q}[x, y]/I \longrightarrow \mathbb{Q}$.

Soluzione Il polinomio $xy^2 - 1$ e' lineare e primitivo in x quindi e' irriducibile cosi' l'ideale $I = (xy^2 - 1)$ e' primo. Non e' pero' massimale perche' I e' contenuto propriamente in $(x - 1, y - 1)$ che e' massimale.

Un omomorfismo di anello $f : \mathbb{Q}[x, y]/I \longrightarrow \mathbb{Q}$ e' determinato da$f(x) = a$ e $f(y) = b$ e dato che $a = \frac{1}{b^2}$, gli omomorfismi sono in corrispondenza con $\mathbb{Q}^*$.

Esercizio 4.

i) Sia M un A-modulo e siano N_1 e N_2 sottomoduli di M. Provare che se M/N_1 e M/N_2 sono noetheriani allora $M/(N_1 \cap N_2)$ e' noetheriano.

ii) Sia $A = K[x]/(fg^2)$ con $f, g, \in K[x]$, polinomi relativamente primi, provare che un A-modulo M e' noetheriano se e solo se i moduli M/fM e M/g^2M sono finitamente generati.

Soluzione L'omomorfismo $\varphi : M/(N_1 \cap N_2) \longrightarrow M/N_1 \times M/N_2$ e' iniettivo e quindi $M/(N_1 \cap N_2)$ e' noetheriano dato che e' isomorfo a un sottomodulo di $M/N_1 \times M/N_2$ che e' noetheriano.

Innanzitutto $(f, g^2) = 1$ cosi' $0 = (fg^2)M = (f)M \cap (g^2)M$. Inoltre M/fM e M/g^2M sono noetheriani, poiche' A e' noetheriano e sono finitamente generati su A, allora dalla prima parte dell'esercizio: $M \cong M/(fM \cap g^2M)$ e' noetheriano.

Esercizio 5. Sia $I = (x^2 + y^2 + z^2 - 2, y^2 - z^2 + 1, xz - 1) \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$.

a. Provare che $\mathbf{V}(I)$ e' finito.

b. Descrivere $\mathbf{V}(I)$ come unione di varieta' irriducibili (su $\mathbb{Q}$).

Soluzione La base di Groebner ridotta di I (rispetto all'ordinamento lex con$x > y > z$) $(x+2z^3-3z, y^2-z^2+1, 2z^4-3z^2+1)$ contiene tre polinomi monici in x, y, e z, inoltre $2z^4 - 3z^2 + 1 = (z^2 - 1)(2z^2 + 1)$ quindi $V(I)$ e' finita . Dalla base di Groebner otteniamo che $V(I) = V(x + 2z^3 - 3z, y^2 - z^2 + 1, (z^2 - 1)(2z^2 + 1)) = V(x - 1, y, z - 1) \cup V(x + 1, y, z + 1) \cup V(x - 2z, y^2 + \frac{1}{2}, z^2 - \frac{1}{2})$.