Algebra II – 22 Settembre 2010

Esercizio 1. Siano M, N A-moduli e siano $f : M \longrightarrow N$ e $g : N \longrightarrow M$ omomorfismi tali che $g \circ f = \mathrm{id}_M$. Provare che $N = \mathrm{Ker}\, g \oplus \mathrm{Im}\, f$.
Svolgimento Sia $n \in N$ e consideriamo $n = (n - f(g(n)(n - f(g(n)) + f(g(n))$, questa scrittura dimostra la tesi. Infatti $f(g(n)) \in \mathrm{Im} f$ e $n - f(g(n) \in \mathrm{Ker} g$ dato che per ipotesi $g \circ f = \mathrm{id}_M$. Inoltre se $n = f(m) \in \mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f$ allora $0 = g(n) = g(f(m))$ da cui $m = 0$.

Esercizio 2. Sia A un dominio di integrità. Supponiamo che per ogni ideale $(0) \neq I \subset A$ esistano un ideale $(0) \neq J \subset A$ e un elemento $d \in A$ tali che $IJ = (d)$.

a. Provare che esiste un ideale finitamente generato $\bar{J} = (g_1, \ldots, g_k)$ tale che $I\bar{J} = (d)$.

b. Provare che $\forall f \in I$ esiste $h_i \in A$ tale che $g_i f = h_i d$.

c. A è noetheriano.

Svolgimento a. Poiche' $(d) = IJ$ si ha $d = \sum_{i=1}^{s} f_i g_i$ con $f_i \in I$ e $g_i \in J$. Sia $\bar{J} = (g_1, \ldots, g_s)$. Allora $d \in \bar{J}$ e quindi $(d) \subseteq I\bar{J} \subseteq IJ = (d)$.
b. Sia $f \in I$, allora, per ogni i, $fg_i \in IJ = (d)$ da cui segue che esiste h_i tale che $fg_i = h_i d$.
c. Proviamo che ogni ideale I di A e' finitamente generato. Sia $\bar{J}$ l'ideale (finitamente generato) costruito in a., tale che $I\bar{J} = (d)$. Per ogni $f \in I$ si ha che $fd \in I\bar{J}$ e quindi $fd = f\sum_{i=1}^{s} f_i g_i = \sum_{i=1}^{s} f_i (f g_i) = d \sum_{i=1}^{s} f_i h_i$. Poiche' A e' un dominio da questo segue che $f = \sum_{i=1}^{s} f_i h_i$ e quindi che $I = (f_1, \ldots, f_s)$.

Esercizio 3. Sia A un dominio con un numero finito di ideali primi. Indichiamo con $Q(A)$ il campo delle frazioni di A. Provare che esiste un elemento $a \in A$ tale che $Q(A) \cong A_a$.

Svolgimento Siano $P_0 = (0), \dots, P_k$ i primi (distinti) di A. Osserviamo innanzitutto che se $k = 0$ allora A e' un campo, quindi $A_a = Q(A)$ per ogni $a \neq 0$. Sia $k > 0$ e consideriamo $\cap_1^k P_i$. Questa intersezione e' diversa da zero, altrimenti se fosse $\cap_1^k P_i = (0) = P_0$ esisterebbe i tale che $P_i = P_0$. Sia quindi $0 \neq a \in \cap_1^k P_i$. Se consideriamo $A_a \subseteq Q(A)$ questo anello non ha ideali primi diversi da zero e quindi e' un campo che contiene $Q(A)$ e quindi e' uguale a $Q(A)$. (Altra dimostrazione: Sia $\frac{\alpha}{\beta} \in Q(A)$. Se consideriamo $\sqrt{(\beta)}$ sia ha che $a \in \cap_1^k P_i \subset \cap_1^s P_i = \sqrt{(\beta)}$ e quindi esiste t tale che $a^t = c\beta$ da cui segue che $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha c}{a^t}$ ossia $Q(A) \subseteq A_a$).

Esercizio 4. Siano A, B, C matrici intere 3×3 e sia D la matrice $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.
Supponiamo che $\det A = 28$, e $\det B = 7$.
Trovare le possibili forme di Smith di D, ciclici, esibendo un esempio di ciascuna.
Svolgimento Dato che $\det A = 28$, e $\det B = 7$ le possibili forme di Smith per A sono matrici che hanno sulla diagonale $1, 1, 28$ e $1, 214$, mentre per B abbiamo solo una possibilita' e si ha $B = diag(1, 1, 7)$

Analogamente, dato che il deteminante di $D = 196$ le possibili forme di Smith per D ci sono le seguenti possibilita' che possono essere realizzate per A e C rispettivamente dei deguenti tipi:
1) $D = diag(1, 1, 1, 1, 1, 196)$, $A = diag(1, 1, 28)$, $C = diag(0, 0, 1)$
2) $D = diag(1, 1, 1, 1, 7, 28)$, $A = diag(1, 1, 28)$, $C = 0$
3) $D = diag(1, 1, 1, 1, 2, 98)$, $A = diag(1, 2, 14)$, $C = diag(0, 0, 2)$
4) $D = diag(1, 1, 1, 1, 14, 14)$, $A = diag(1, 2, 14)$, $C = 0$

Esercizio 5. Consideriamo l'ideale $I = (x^2y^3z^4,\ x^2 + y^2 + z^2 - 1,\ 2 - xy) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$:

1. Provare che $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y, z]/I$ è finita e calcolarla,
2. Se $J = (3x^3 + xz - 2,\ xy + z^2 - 2) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$, provare che $I + J = 1$.

Svolgimento Prima di calcolare una base di Groebner per I, osserviamo che usando la relazione $xy - 2$ possiamo ridurre $x^2y^3z^4$ e ottenere che $z^4 \in I$, in questo modo possiamo semplificare i generatori,cosí $I = (f_1, f_2, f_3)$, con $f_1 = z^4, f_2 = x^2 + y^2 + z^2 - 1, f_3 = xy - 2$.

Rispetto all'ordinamento lessicografico $x > y > z$ basta allora calcolare i seguenti S-polinomi.

$$S(f_2, f_3) = yf_2 - xf_3 = 2x + y^3 + yz^2 - y = f_4$$

$$S(f_2, f_4) = 2f_2 - xf_4$$

$$S(f_3, f_4) = 2yf_4 - 2f_3 = y^4 + y^2z^2 - y^2 + 4 = f_5$$

Dato che $S(f_2, f_4) = (1 - y^2 - z^2)f_3$ (ossia riduce a zero) e i termini di testa di f_1, f_4, f_5 sono disgiunti, $G = (f_4, f_5, f_1)$ e' la base di Groebner ridotta e si ha $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y, z]/I = 16$.

Per verificare che $I + J = 1$ si puo' dimostrare che $V(I + J) = \emptyset$ risolvendo il sistema triangolare calcolato nel primo punto e verficando che nessuna soluzione soddisfa le equazioni di J. In alternativa si puo' osservare che $z \in \sqrt{I + J}$ quindi il polinomio $g_1 = 3x^3 - 2 \in \sqrt{I + J}$. Ma allora anche $y^3 g_1 = 2x^3y^3 - 2y^3 \in \sqrt{I + J}$. Usando il polinomio $xy - 2$ si ottiene che $2y^3 - 24 \in \sqrt{I + J}$. Poiche' $\gcd(y^3 - 12, f_5) = 1$ si ha la tesi.