Prima prova in Itinere Ist. Mat., Seconda parte, Tema XY

10 dicembre 2019

Esercizio 1.

(1) Dato il polinomio $P(z) = 5z^5 + 2z^2$ trovarne le radici in $\mathbb{C}$ e fattorizzarlo in $\mathbb{R}$.
(2) Determinare tutte le $z \in \mathbb{C}$ tali che $P(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) \leq 0$.
(3) Trovare le $z \in \mathbb{C}$ tali che valga $P(z) = 0 = Q(z)$ dove $Q(z) = 25z^6 - 4$.

Soluzione.

(1) Il polinomio si fattorizza come $P(z) = 5z^2(z^3 + 2/5)$ e quindi le sue radici sono $\omega_0 = 0$ (radice doppia) e le radici terze di $-2/5$, ovvero

$$\omega_1 = -\sqrt[3]{\frac{2}{5}}, \quad \omega_2 = -(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})\sqrt[3]{\frac{2}{5}}, \quad \omega_3 = -(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})\sqrt[3]{\frac{2}{5}}.$$

Quindi $P(z)$ si fattorizza su $\mathbb{C}$ come

$$P(z) = 5z^2 \left(z + \sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right)\left(z + (-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right)\left(z + (-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right)$$

e su $\mathbb{R}$ come

$$P(z) = 5z^2 \left(z + \sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right)\left(z^2 - \sqrt[3]{\frac{2}{5}}z + \sqrt[3]{\frac{4}{25}}\right).$$

(2) La parte immaginaria delle radici è data da

$$\mathrm{Im}(\omega_0) = 0, \quad \mathrm{Im}(\omega_1) = 0, \quad \mathrm{Im}(\omega_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{5}}, \quad \mathrm{Im}(\omega_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{5}}.$$

Pertanto le radici con parte immaginaria minore o uguale a zero sono $\omega_0, \omega_1, \omega_2$.

(3) Il polinomio $Q(z)$ è differenza di due quadrati e quindi si fattorizza come $Q(z) = (5z^3 - 2)(5z^3 + 2)$. Le radici di $P(z)$ diverse da 0 sono esattamente le radici del fattore $(5z^3 + 2)$, mentre $\omega_0 = 0$ non è radice di $Q(z)$ perché $Q(0) = -4$. Dunque gli z cercati sono $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Esercizio 2. Dato il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2(x\sqrt[3]{x})\ln(\cos(3x))}{x^\alpha}$$

calcolarlo per $\alpha = 4$; determinare poi $\sup\{\alpha \in \mathbb{R} :$ il limite sopra vale $0\}$ e $\sup\{\alpha \in \mathbb{N} :$ il limite sopra vale $0\}$.

Soluzione.

Si calcolano gli sviluppi in infinitesimi per $x \to 0+$ di $\sin^2(x\sqrt[3]{x})$ e di $\ln(\cos(3x))$. Visto che si tratta di un prodotto ed il denominatore è $x^4 = x^2 \cdot x^2$ provo a fermarmi al secondo ordine di $\sin(t), \cos(t)$ e comporre lo sviluppo. Si ha

$$\sin(t) = t + o(t^2),\ \sin^2(t) = (t + o(t^2))^2 = t^2 + o(t^2)$$

da cui preso $t = x\sqrt[3]{x}$ risulta

$$\sin^2(x\sqrt[3]{x}) = x^2\sqrt[3]{x^2} + o(x^2\sqrt[3]{x^2}).$$

Si ha poi

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),\ \ln(1+t) = t + o(t)$$

da cui per $t = 3x$ si ha $\cos(3x) - 1 = -\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$ e per $t = \cos(3x) - 1$ si ha

$$\ln(\cos(3x)) = \ln(1 + \cos(3x) - 1) = -\frac{9}{2}x^2 + o(x^2) + o(x^2 + o(x^2)) = -\frac{9}{2}x^2 + o(x^2).$$

Sostituendo e semplificando si ottiene

$$\frac{\sin^2(x\sqrt[3]{x})\ln(\cos(3x))}{x^4} = \frac{(x^2\sqrt[3]{x^2} + o(x^2\sqrt[3]{x^2}))(-\frac{9}{2}x^2 + o(x^2))}{x^4} = -\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + o(\sqrt[3]{x^2})$$

da cui il limite cercato vale 0.

Ripetendo lo stesso procedimento si ha anche

$$\frac{\sin^2(x\sqrt[3]{x})\ln(\cos(3x))}{x^\alpha} = \frac{-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + o(\sqrt[3]{x^2})}{x^{\alpha-4}} = -\frac{9}{2}x^{\frac{14}{3}-\alpha}(1 + o(1))$$

ed il limite sopra vale 0 se e solo se $\alpha < \dfrac{14}{3}$.

Si deduce che

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \text{il limite sopra vale } 0\} = \sup(-\infty, \frac{14}{3}) = \frac{14}{3}$$

e

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{N} : \text{il limite sopra vale } 0\} = \sup\left((-\infty, \frac{14}{3}) \cap \mathbb{N}\right) = 4.$$

Esercizio 3. Data $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-2x-1}$, determinarne dominio di esistenza, eventuali asintoti e massimi e minimi locali/globali. Tracciarne poi un grafico approssimativo.
Soluzione.
Il dominio di esistenza della funzione richiede che $x^2-2x-1 \neq 0$, vale a dire

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}.$$

Nei punti $1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$ f ha due asintoti verticali, infatti si ha (tenendo conto che $1-\sqrt{2} < 0 < 1+\sqrt{2}$)

$$\lim_{x\to(1-\sqrt{2})+} \frac{x^3}{x^2-2x-1} = \frac{(1-\sqrt{2})^3}{0-} = +\infty, \lim_{x\to(1-\sqrt{2})-} \frac{x^3}{x^2-2x-1} = \frac{(1-\sqrt{2})^3}{0+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to(1+\sqrt{2})+} \frac{x^3}{x^2-2x-1} = \frac{(1+\sqrt{2})^3}{0+} = +\infty, \lim_{x\to(1+\sqrt{2})-} \frac{x^3}{x^2-2x-1} = \frac{(1+\sqrt{2})^3}{0-} = -\infty.$$

Risulta poi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2-2x-1} = +\infty, \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-2x-1} = -\infty$$

per cui si cercano eventuali asintoti obliqui

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2-2x-1)} = 1, \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-2x-1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x}{x^2-2x-1} = 2$$

si deduce che la retta $y = x+2$ è asintoto a $\pm\infty$.

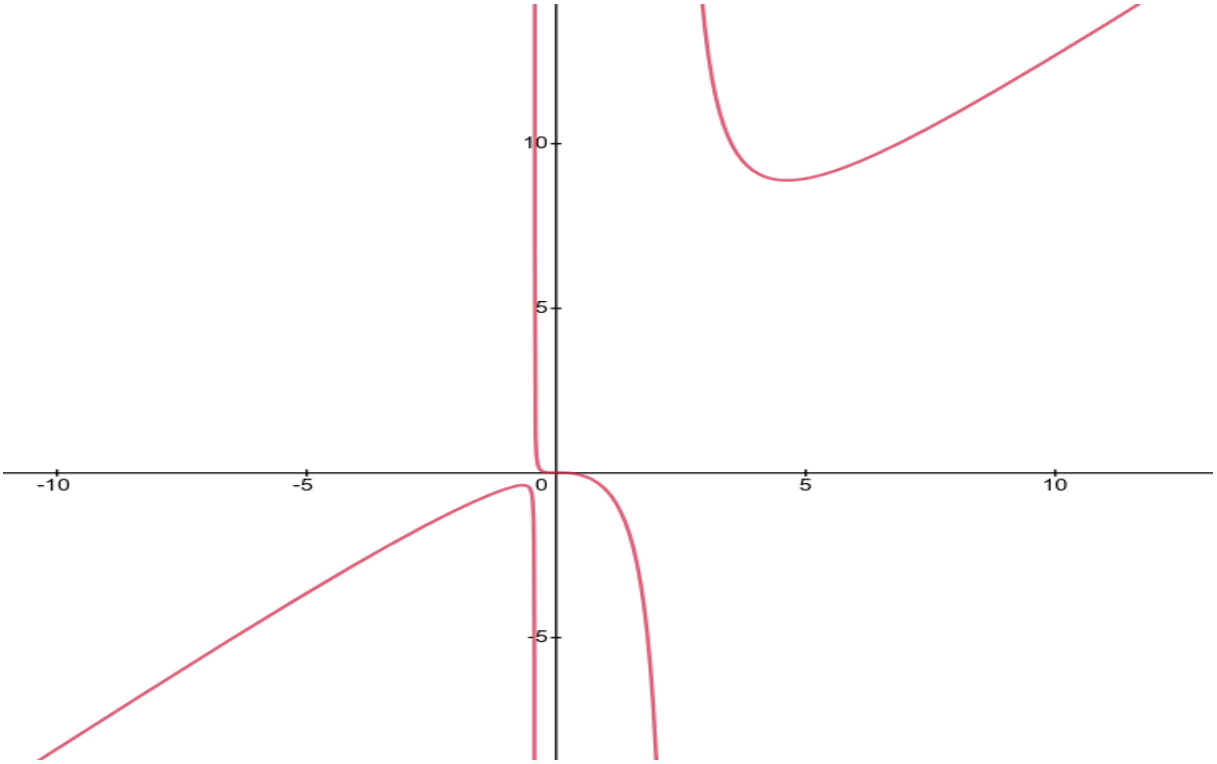
Visto che la funzione è derivabile in D per calcolare le zone di monotonia ed eventuali max/min locali si studia il segno di

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-2x-1) - x^3(2x-2)}{(x^2-2x-1)^2} = \frac{x^2(x^2-4x-3)}{(x^2-2x-1)^2} \quad x \in D;$$

f è quindi monotona crescente sugli intervalli contenuti in D su cui $f' \geq 0$ e decrescente sugli intervalli rimanenti; notando che $2-\sqrt{7} < 1-\sqrt{2} < 0 < 1+\sqrt{2} < 2+\sqrt{7}$ si ha che f cresce su $(-\infty, 2-\sqrt{7}]$, f decresce su $[2-\sqrt{7}, 1-\sqrt{2})$ f decresce su $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$, f decresce su $(1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{7})$ ed f cresce su $[2+\sqrt{7}, +\infty)$. In $2-\sqrt{7}$ f ha un massimo locale uguale a $(17-7\sqrt{7})/4 \sim 0.38$ ed in $2+\sqrt{7}$ f ha un minimo locale uguale a $(17+7\sqrt{7})/4 \sim 8.8$, mentre $\sup f = +\infty$ ed $\inf f = -\infty$. Si può calcolare anche la derivata seconda ed ottenere

$$f''(x) = \frac{2x(5x^2+6x+3)}{(x^2-2x-1)^3} \quad x \in D$$

da cui f è concava su $(-\infty, 1-\sqrt{2})$, f è convessa su $(1-\sqrt{2}), 0]$, f è concava su $[0, 1+\sqrt{2})$ ed f è convessa su $(1+\sqrt{2}, +\infty)$. In $x = 0$ f ha un punto di flesso discendente.



10
5
-5
-10
-5
0
5
10

Prima prova in Itinere Ist. Mat., Seconda parte, Tema ZW

10 dicembre 2019

Esercizio 1.

(1) Dato il polinomio $P(z) = 7z^4 + 3z^2$ trovarne le radici in $\mathbb{C}$ e fattorizzarlo in $\mathbb{R}$.
(2) Determinare tutte le $z \in \mathbb{C}$ tali che $P(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.
(3) Trovare le $z \in \mathbb{C}$ tali che valga $P(z) = 0 = Q(z)$ dove $Q(z) = 49z^4 - 9$.

Soluzione.

(1) Il polinomio si fattorizza come $P(z) = 7z^2(z^2 + 3/7)$ e quindi le sue radici sono $\omega_0 = 0$ (radice doppia) e le radici quadrate di $-3/7$, ovvero

$$\omega_1 = i\sqrt{\frac{3}{7}}, \quad \omega_2 = -i\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Quindi $P(z)$ si fattorizza su $\mathbb{C}$ come

$$P(z) = 7z^2\left(z - i\sqrt{\frac{3}{7}}\right)\left(z + i\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$$

e su $\mathbb{R}$ come

$$P(z) = 7z^2\left(z^2 + \frac{3}{7}\right).$$

(2) La parte immaginaria delle radici è data da

$$\mathrm{Im}(\omega_0) = 0, \quad \mathrm{Im}(\omega_1) = \sqrt{\frac{3}{7}}, \quad \mathrm{Im}(\omega_2) = -\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Pertanto le radici con parte immaginaria maggiore o uguale a zero sono ω_0, ω_1.

(3) Il polinomio $Q(z)$ è differenza di due quadrati e quindi si fattorizza come $Q(z) = (7z^2 - 3)(7z^2 + 3)$. Le radici di $P(z)$ diverse da 0 sono esattamente le radici del fattore $(7z^2 + 3)$, mentre $\omega_0 = 0$ non è radice di $Q(z)$ perché $Q(0) = -9$. Dunque gli z cercati sono ω_1, ω_2.

Esercizio 2. Dato il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2(x\sqrt[3]{x})\ln(\cos(4x))}{x^\alpha}$$

calcolarlo per $\alpha = 4$; determinare poi $\sup\{\alpha \in \mathbb{R}$: il limite sopra vale $0\}$ e $\sup\{\alpha \in \mathbb{N}$: il limite sopra vale $0\}$.

Soluzione.

Si calcolano gli sviluppi in infinitesimi per $x \to 0+$ di $\sin^2(x\sqrt[3]{x})$ e di $\ln(\cos(4x))$. Visto che si tratta di un prodotto ed il denominatore è $x^4 = x^2 \cdot x^2$ provo a fermarmi al secondo ordine di $\sin(t), \cos(t)$ e comporre lo sviluppo. Si ha

$$\sin(t) = t + o(t^2),\ \sin^2(t) = (t + o(t^2))^2 = t^2 + o(t^2)$$

da cui preso $t = x\sqrt[3]{x}$ risulta

$$\sin^2(x\sqrt[3]{x}) = x^2\sqrt[3]{x^2} + o(x^2\sqrt[3]{x^2}).$$

Si ha poi

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),\ \ln(1+t) = t + o(t)$$

da cui per $t = 4x$ si ha $\cos(4x) - 1 = -8x^2 + o(x^2)$ e per $t = \cos(4x) - 1$ si ha

$$\ln(\cos(4x)) = \ln(1 + \cos(4x) - 1) = -8x^2 + o(x^2) + o(x^2 + o(x^2)) = -8x^2 + o(x^2).$$

Sostituendo e semplificando si ottiene

$$\frac{\sin^2(x\sqrt[3]{x})\ln(\cos(4x))}{x^4} = \frac{(x^2\sqrt[3]{x^2} + o(x^2\sqrt[3]{x^2}))(-8x^2 + o(x^2))}{x^4} = -8\sqrt[3]{x^2} + o(\sqrt[3]{x^2})$$

da cui il limite cercato vale 0.

Ripetendo lo stesso procedimento si ha anche

$$\frac{\sin^2(x\sqrt[3]{x})\ln(\cos(4x))}{x^\alpha} = \frac{-8\sqrt[3]{x^2} + o(\sqrt[3]{x^2})}{x^{\alpha-4}} = -8x^{\frac{14}{3}-\alpha}(1 + o(1))$$

ed il limite sopra vale 0 se e solo se $\alpha < \dfrac{14}{3}$.

Si deduce che

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \text{il limite sopra vale } 0\} = \sup(-\infty, \frac{14}{3}) = \frac{14}{3}$$

e

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{N} : \text{il limite sopra vale } 0\} = \sup\Big((-\infty, \frac{14}{3}) \cap \mathbb{N}\Big) = 4.$$

Esercizio 3. Data $f(x) = \dfrac{x^3}{1+3x-x^2}$, determinarne dominio di esistenza, eventuali asintoti e massimi e minimi locali/globali. Tracciarne poi un grafico approssimativo.
Soluzione.
Il dominio di esistenza della funzione richiede che $x^2-3x-1 \neq 0$, vale a dire

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right\}.$$

Nei punti $(3-\sqrt{13})/2, (3+\sqrt{13})/2$ f ha due asintoti verticali, infatti si ha (tenendo conto che $3-\sqrt{13} < 0 < 3+\sqrt{13}$)

$$\lim_{x\to(3-\sqrt{13})/2+} \frac{x^3}{1+3x-x^2} = \frac{(3-\sqrt{13})^3}{0+} = -\infty, \lim_{x\to(3-\sqrt{13})/2-} \frac{x^3}{1+3x-x^2} = \frac{(3-\sqrt{13})^3}{0-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to(3+\sqrt{13})/2+} \frac{x^3}{1+3x-x^2} = \frac{(3+\sqrt{13})^3}{0-} = -\infty, \lim_{x\to(3+\sqrt{13})/2-} \frac{x^3}{1+3x-x^2} = \frac{(3+\sqrt{13})^3}{0+} = +\infty.$$

Risulta poi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1+3x-x^2} = -\infty, \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{1+3x-x^2} = +\infty$$

per cui si cercano eventuali asintoti obliqui

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(1+3x-x^2)} = -1, \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{1+3x-x^2} + x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+x}{1+3x-x^2} = -3$$

si deduce che la retta $y = -(x+3)$ è asintoto a $\pm\infty$.

Visto che la funzione è derivabile in D per calcolare le zone di monotonia ed eventuali max/min locali si studia il segno di

$$f'(x) = \frac{3x^2(1+3x-x^2)+x^3(2x-3)}{(x^2-3x-1)^2} = \frac{x^2(3+6x-x^2)}{(1+3x-x^2)^2} \quad x \in D;$$

f è quindi monotona crescente sugli intervalli contenuti in D su cui $f' \geq 0$ e decrescente sugli intervalli rimanenti; notando che $3-\sqrt{12} < (3-\sqrt{13})/2 < 0 < (3+\sqrt{13})/2 < 3+\sqrt{12}$ si ha che f decresce su $(-\infty, 3-\sqrt{12}]$, f cresce su $[3-\sqrt{12}, (3-\sqrt{13}/2)$ f cresce su $((3-\sqrt{13})/2, (3+\sqrt{13})/2)$, f cresce su $(3+\sqrt{13})/2, 3+\sqrt{12})$ ed f decresce su $[2+\sqrt{12}, +\infty)$. In $3+\sqrt{12}$ f ha un massimo locale uguale a $-(81+48\sqrt{3})/13 \sim -12.6$ ed in $3-\sqrt{12}$ f ha un minimo locale uguale a $(48\sqrt{3}-81)/13 \sim 0.16$, mentre $\sup f = +\infty$ ed $\inf f = -\infty$. Si può calcolare anche la derivata seconda ed ottenere

$$f''(x) = \frac{2x(10x^2+9x+3)}{(1+3x-x^2)^3} \quad x \in D$$

da cui f è convessa su $(-\infty, (3-\sqrt{13})/2)$, f è concava su $((3-\sqrt{13})/2, 0]$, f è convessa su $[0, (3+\sqrt{13})/2)$ ed f è concava su $((3+\sqrt{13})/2, +\infty)$. In $x = 0$ f ha un punto di flesso ascendente.

Prima prova in Itinere Ist. Mat., Seconda parte, Tema PAPERINO

10 dicembre 2019

Esercizio 1.

(1) Dato il polinomio $P(z) = 5z^5 - 2z^2$ trovarne le radici in $\mathbb{C}$ e fattorizzarlo in $\mathbb{R}$.
(2) Determinare tutte le $z \in \mathbb{C}$ tali che $P(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.
(3) Trovare le $z \in \mathbb{C}$ tali che valga $P(z) = 0 = Q(z)$ dove $Q(z) = 25z^6 - 4$.

Soluzione.

(1) Il polinomio si fattorizza come $P(z) = 5z^2(z^3 - 2/5)$ e quindi le sue radici sono $\omega_0 = 0$ (radice doppia) e le radici terze di $2/5$, ovvero

$$\omega_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}, \quad \omega_2 = (-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})\sqrt[3]{\frac{2}{5}}, \quad \omega_3 = (-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})\sqrt[3]{\frac{2}{5}}.$$

Quindi $P(z)$ si fattorizza su $\mathbb{C}$ come

$$P(z) = 5z^2\left(z - \sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right)\left(z - (-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right)\left(z - (-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right)$$

e su $\mathbb{R}$ come

$$P(z) = 5z^2\left(z - \sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right)\left(z^2 + \sqrt[3]{\frac{2}{5}}z + \sqrt[3]{\frac{4}{25}}\right).$$

(2) La parte immaginaria delle radici è data da

$$\mathrm{Im}(\omega_0) = 0, \quad \mathrm{Im}(\omega_1) = 0, \quad \mathrm{Im}(\omega_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{5}}, \quad \mathrm{Im}(\omega_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{5}}.$$

Pertanto le radici con parte immaginaria maggiore o uguale a zero sono $\omega_0, \omega_1, \omega_2$.

(3) Il polinomio $Q(z)$ è differenza di due quadrati e quindi si fattorizza come $Q(z) = (5z^3 - 2)(5z^3 + 2)$. Le radici di $P(z)$ diverse da 0 sono esattamente le radici del fattore $(5z^3 - 2)$, mentre $\omega_0 = 0$ non è radice di $Q(z)$ perché $Q(0) = -4$. Dunque gli z cercati sono $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Esercizio 2. Dato il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2(x\sqrt[4]{x})\ln(\cos(3x))}{x^\alpha}$$

calcolarlo per $\alpha = 4$; determinare poi $\sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \text{il limite sopra vale } 0\}$ e $\sup\{\alpha \in \mathbb{N} : \text{il limite sopra vale } 0\}$.

Soluzione.

Si calcolano gli sviluppi in infinitesimi per $x \to 0+$ di $\sin^2(x\sqrt[4]{x})$ e di $\ln(\cos(3x))$. Visto che si tratta di un prodotto ed il denominatore è $x^4 = x^2 \cdot x^2$ provo a fermarmi al secondo ordine di $\sin(t), \cos(t)$ e comporre lo sviluppo. Si ha

$$\sin(t) = t + o(t^2),\ \sin^2(t) = (t + o(t^2))^2 = t^2 + o(t^2)$$

da cui preso $t = x\sqrt[4]{x}$ risulta

$$\sin^2(x\sqrt[4]{x}) = x^2\sqrt{x} + o(x^2\sqrt{x}).$$

Si ha poi

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),\ \ln(1+t) = t + o(t)$$

da cui per $t = 3x$ si ha $\cos(3x) - 1 = -\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$ e per $t = \cos(3x) - 1$ si ha

$$\ln(\cos(3x)) = \ln(1 + \cos(3x) - 1) = -\frac{9}{2}x^2 + o(x^2) + o(x^2 + o(x^2)) = -\frac{9}{2}x^2 + o(x^2).$$

Sostituendo e semplificando si ottiene

$$\frac{\sin^2(x\sqrt[4]{x})\ln(\cos(3x))}{x^4} = \frac{(x^2\sqrt{x} + o(x^2\sqrt{x}))(-\frac{9}{2}x^2 + o(x^2))}{x^4} = -\frac{9}{2}\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

da cui il limite cercato vale 0.

Ripetendo lo stesso procedimento si ha anche

$$\frac{\sin^2(x\sqrt[4]{x})\ln(\cos(3x))}{x^\alpha} = \frac{-\frac{9}{2}\sqrt{x} + o(\sqrt{x})}{x^{\alpha-4}} = -\frac{9}{2}x^{\frac{9}{2}-\alpha}(1 + o(1))$$

ed il limite sopra vale 0 se e solo se $\alpha < \dfrac{9}{2}$.

Si deduce che

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \text{il limite sopra vale } 0\} = \sup(-\infty, \frac{9}{2}) = \frac{9}{2}$$

e

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{N} : \text{il limite sopra vale } 0\} = \sup\Big((-\infty, \frac{9}{2}) \cap \mathbb{N}\Big) = 4.$$

Esercizio 3. Data $f(x) = \dfrac{x^3}{1+2x-x^2}$, determinarne dominio di esistenza, eventuali asintoti e massimi e minimi locali/globali. Tracciarne poi un grafico approssimativo.
Soluzione.
La funzione coincide con quella studiata nel Tema XY a meno di un fattore (-1) per cui basta moltiplicare tutti i limiti e le derivate per (-1), scambiare i punti di max e min locali, le zone di crescenza/decrescenza, concavità/convessità e simmetrizzare il grafico (asintoto compreso) rispetto all'asse delle x.

Prima prova in Itinere Ist. Mat., Seconda parte, Tema TOPOLINO

10 dicembre 2019

Esercizio 1.

(1) Dato il polinomio $P(z) = 14z^5 + 6z^2$ trovarne le radici in $\mathbb{C}$ e fattorizzarlo in $\mathbb{R}$.
(2) Determinare tutte le $z \in \mathbb{C}$ tali che $P(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) \leq 0$.
(3) Trovare le $z \in \mathbb{C}$ tali che valga $P(z) = 0 = Q(z)$ dove $Q(z) = 49z^6 - 9$.

Soluzione.

(1) Il polinomio si fattorizza come $P(z) = 14z^2(z^2 + 3/7)$ e quindi le sue radici sono $\omega_0 = 0$ (radice doppia) e le radici quadrate di $-3/7$, ovvero
$$\omega_1 = i\sqrt{\frac{3}{7}}, \quad \omega_2 = -i\sqrt{\frac{3}{7}}.$$
Quindi $P(z)$ si fattorizza su $\mathbb{C}$ come
$$P(z) = 14z^2 \left(z - i\sqrt{\frac{3}{7}}\right)\left(z + i\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$$
e su $\mathbb{R}$ come
$$P(z) = 14z^2 \left(z^2 + \frac{3}{7}\right).$$
(2) La parte immaginaria delle radici è data da
$$\mathrm{Im}(\omega_0) = 0, \quad \mathrm{Im}(\omega_1) = \sqrt{\frac{3}{7}}, \quad \mathrm{Im}(\omega_2) = -\sqrt{\frac{3}{7}}.$$
Pertanto le radici con parte immaginaria minore o uguale a zero sono ω_0, ω_2.
(3) Il polinomio $Q(z)$ è differenza di due quadrati e quindi si fattorizza come $Q(z) = (7z^2 - 3)(7z^2 + 3)$. Le radici di $P(z)$ diverse da 0 sono esattamente le radici del fattore $(7z^2 + 3)$, mentre $\omega_0 = 0$ non è radice di $Q(z)$ perché $Q(0) = -9$. Dunque gli z cercati sono ω_1, ω_2.

Esercizio 2. Dato il limite
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2(x\sqrt[4]{x})\ln(\cos(4x))}{x^\alpha}$$
calcolarlo per $\alpha = 4$; determinare poi $\sup\{\alpha \in \mathbb{R} :$ il limite sopra vale $0\}$ e $\sup\{\alpha \in \mathbb{N} :$ il limite sopra vale $0\}$.

Soluzione.

Si calcolano gli sviluppi in infinitesimi per $x \to 0+$ di $\sin^2(x\sqrt[4]{x})$ e di $\ln(\cos(4x))$. Visto che si tratta di un prodotto ed il denominatore è $x^4 = x^2 \cdot x^2$ provo a fermarmi al secondo ordine di $\sin(t), \cos(t)$ e comporre lo sviluppo. Si ha
$$\sin(t) = t + o(t^2),\ \sin^2(t) = (t + o(t^2))^2 = t^2 + o(t^2)$$
da cui preso $t = x\sqrt[4]{x}$ risulta
$$\sin^2(x\sqrt[4]{x}) = x^2\sqrt{x} + o(x^2\sqrt{x}).$$
Si ha poi
$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),\ \ln(1+t) = t + o(t)$$
da cui per $t = 4x$ si ha $\cos(4x) - 1 = -8x^2 + o(x^2)$ e per $t = \cos(4x) - 1$ si ha
$$\ln(\cos(4x)) = \ln(1 + \cos(4x) - 1) = -8x^2 + o(x^2) + o(x^2 + o(x^2)) = -8x^2 + o(x^2).$$
Sostituendo e semplificando si ottiene
$$\frac{\sin^2(x\sqrt[4]{x})\ln(\cos(4x))}{x^4} = \frac{(x^2\sqrt{x} + o(x^2\sqrt{x}))(-8x^2 + o(x^2))}{x^4} = -8\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$
da cui il limite cercato vale 0.

Ripetendo lo stesso procedimento si ha anche
$$\frac{\sin^2(x\sqrt[4]{x})\ln(\cos(4x))}{x^\alpha} = \frac{-8\sqrt{x} + o(\sqrt{x})}{x^{\alpha-4}} = -8x^{\frac{9}{2}-\alpha}(1 + o(1))$$
ed il limite sopra vale 0 se e solo se $\alpha < \frac{9}{2}$.

Si deduce che
$$\sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \text{il limite sopra vale } 0\} = \sup(-\infty, \frac{9}{2}) = \frac{9}{2}$$
e
$$\sup\{\alpha \in \mathbb{N} : \text{il limite sopra vale } 0\} = \sup\Big((-\infty, \frac{9}{2}) \cap \mathbb{N}\Big) = 4.$$

Esercizio 3. Data $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3x - 1}$, determinarne dominio di esistenza, eventuali asintoti e massimi e minimi locali/globali. Tracciarne poi un grafico approssimativo.
Soluzione.
La funzione coincide con quella studiata nel Tema WZ a meno di un fattore (-1) per cui basta moltiplicare tutti i limiti e le derivate per (-1), scambiare i punti di max e min locali, le zone di crescenza/decrescenza, concavità/convessità e simmetrizzare il grafico (asintoto compreso) rispetto all'asse delle x.