Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema X

27 gennaio 2020

Esercizio 1. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni in campo complesso:

$$\text{(a) } 12z^2 + 15|z|^2 - 3 = 0; \qquad \text{(b) } (z+2)^3 - (z-2)^3 = 0.$$

Soluzione.

(a) Si scrive l'incognita z in forma algebrica: $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ e si ottiene

$$12(a^2 - b^2 + 2abi) + 15(a^2 + b^2) - 3 = 0.$$

Eguagliando parte reale e parte immaginaria dei due numeri a destra e sinistra dell'uguale si hanno le due equazioni

$$\begin{cases} 27a^2 + 3b^2 - 3 = 0 \\ 2ab = 0 \end{cases} ;$$

la seconda equazione fornisce le due soluzioni separate $a = 0$ oppure $b = 0$, che implementate nella prima equazione danno

$$\begin{cases} b^2 = 1 \\ a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9a^2 = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

da cui si deduce che le soluzioni sono: $i, -i, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}$.

(b) Si possono usare diverse possibilità: una è sviluppare le potenze terze e semplificare, oppure usare l'identità $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

$$0 = (z+2)^3 - (z-2)^3 = 4(2z^2 + 8 + z^2 - 4) = 4(3z^2 + 4).$$

Risolvendo si ottiene subito che le soluzioni sono le due radici seconde di di $-\dfrac{4}{3}$, ossia $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}i, \dfrac{2}{\sqrt{3}}i$.

Esercizio 2. Studiare al variare del parametro reale α la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^3(x)}{x^\alpha \ln^2(1+\sqrt[3]{x^2})}\, dx.$$

Soluzione. La funzione f integranda è continua su $(0,+\infty)$ per cui è integrabile su ogni sottointervallo chiuso e limitato contenuto in questa semiretta. Visto che per alcuni valori di α la funzione è della forma zero su zero, per $x \to 0+$, è necessario valutare la convergenza dell'integrale separatamente su $(0,1)$ e su $(1,+\infty)$. Inoltre poiché f è non negativa si possono usare i criteri di confronto.

Studiamo prima la convergenza su $(0,1)$. Per $x \to 0+$ sviluppiamo prima $\cos^3(x)$ usando la formula del cubo $(1+y)^3 = 1+3y+3y^2+y^3$

$$\cos^3(x) = \big(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\big)^3 = \big(1+\frac{x^2}{2}(-1+o(1))\big)^3 = 1+3\frac{x^2}{2}(-1+o(1))+o(x^2) = 1-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$$

(si poteva anche fare il calcolo diretto della derivata seconda di $\cos^3(x)$ per scrivere la sua formula di Taylor al secondo ordine in $x=0$); si ha poi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-\cos^3(x)}{x^\alpha \ln^2(1+\sqrt[3]{x^2})} = \frac{\dfrac{3x^2}{2}+o(x^2)}{x^\alpha(\sqrt[3]{x^2}+o(\sqrt[3]{x^2}))^2} \\ &= \frac{3}{2}\frac{x^2(1+o(1))}{x^\alpha x^{\frac{4}{3}}(1+o(1))} = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}-\alpha}(1+o(1)) \end{aligned}$$

per cui l'integrale su $(0,1)$ converge solo per $\alpha < \dfrac{5}{3}$.

Rimane da studiare la convergenza su $(1,+\infty)$. Poiché $\ln(1+\sqrt[3]{x^2}) \sim (2/3)\ln(x)$ per $x \to +\infty$ si può confrontare la funzione con una logaritmico-armonica

$$f(x) \le \frac{2}{x^\alpha \ln^2(1+\sqrt[3]{x^2})} \sim \frac{9}{2}\frac{1}{x^\alpha \ln^2(x)}$$

che è nota convergere su $(1,+\infty)$ per $\alpha \ge 1$. Invece per $\alpha < 1$ l'integrale diverge e questo può essere visto usando il fatto che su $A = \cup_{k\in\mathbb{N}}[\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi]$ la funzione $f(x)$ verifica la maggiorazione

$$f(x) \ge \frac{1}{x^\alpha \ln^2(1+\sqrt[3]{x^2})} \qquad \text{per } x \in A \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \ge \int_A \frac{1}{x^\alpha \ln^2(1+\sqrt[3]{x^2})}\, dx;$$

tenendo conto che

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^2(1+\sqrt[3]{x^2})} \sim \frac{1}{x^\alpha \ln^2(x)}$$

e che il secondo integrale, a meno di costanti positive C, si può stimare con

$$\int_A \frac{1}{x^\alpha \ln^2(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\pi+2k\pi}^{2\pi+2k\pi} \frac{1}{x^\alpha \ln^2(x)} \ge C\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k\pi)^\alpha \ln^2(2k\pi)} = +\infty$$

si deriva che l'integrale diverge per $\alpha < 1$.

Concludendo, l'integrale dato converge se e solo se $1 \le \alpha < \dfrac{5}{3}$.

Esercizio 3. Data la funzione $F(x) = \int_0^x t \arctan(t)\, dt$, $x \in \mathbb{R}$

(1) determinare gli insiemi in cui F è convessa;

(2) determinare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x^\beta}$;

(3) determinare il valore della derivata nona di F in $x = 0$.

Soluzione.

(1) F per i teoremi visti a lezione si ha che F è una funzione derivabile su $\mathbb{R}$ con derivata $F'(x) = x \arctan(x)$; essa è quindi anche infinite volte derivabile (perché lo è la sua derivata) e si ha

$$F''(x) = \arctan(x) + \frac{x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Il segno della funzione sopra è facilmente calcolabile dato che è noto che $\arctan(x) \geq 0 \iff x \geq 0$ e lo stesso vale il secondo termine di F''. Si deduce che F è convessa su (ogni sottointervallo di) $[0, +\infty)$.

(2) Si ha $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ per confronto dell'integrando positivo $x \arctan(x)$ con la funzione $g(x) = x$. Ci si riduce quindi a studiare il caso $\beta > 0$, altrimenti il limite cercato vale $+\infty$. Per $\beta > 0$ si ha il rapporto di due funzioni derivabili del tipo infinito su infinito per cui si può usare il Teorema di De l'Hopital e studiare esistenza e valore del limite del rapporto delle derivate:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F'(x)}{\beta x^{\beta-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \arctan(x)}{\beta x^{\beta-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x)}{\beta x^{\beta-2}}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x^\beta} = \begin{cases} +\infty & \beta < 2 \\ \frac{\pi}{4} & \beta = 2 \\ 0 & \beta > 2. \end{cases}$$

(3) Ci si può limitare a calcolare la derivata ottava di $F'(x) = x \arctan(x)$. Per fare questo si usa lo sviluppo in serie di potenze della funzione $\arctan(x)$:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow f(x) = x \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1}.$$

Dalla teoria delle serie di potenze è noto che il termine davanti a x^k è uguale a $D^k f(0)/k!$. Calolcando per $n = 3$ si ottiene $D^9 F(0) = -8!/7$=-5760.

PS: NON ERA NECESSARIO RISOLVERE ESPLICITAMENTE L'INTEGRALE CHE DEFINISCE F.

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema Y

27 gennaio 2020

Esercizio 1. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni in campo complesso:

$$\text{(a) } 24z^2 + 30|z|^2 - 6 = 0; \qquad \text{(b) } (z+1)^4 - (1-z)^4 = 0.$$

Soluzione.

(a) Si trovano le stesse soluzioni dell'esercizio 1 del tema X.

(b) Anche in questo caso si possono svolgere le potenze ed ottenere

$$0 = (z+1)^4 - (1-z)^4 = ((z+1)^2 - (1-z)^2)((z+1)^2 + (1-z)^2) = 4z(2z^2 + 2)$$

da cui le soluzioni sono $0, -i, i$.

Esercizio 2. Studiare al variare del parametro reale α la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^3(x)}{x^\alpha \ln(1+\sqrt[4]{x})}\, dx.$$

Soluzione. Si suano gli stessi argomenti e sviluppi dell'esercizio 2 del Tema X.

Per la convergenza su $(0,1)$ si fanno i seguenti cambiamenti

$$f(x) = \frac{1-\cos^3(x)}{x^\alpha \ln(1+\sqrt[4]{x})} = \frac{\frac{3x^2}{2} + o(x^2)}{x^\alpha(\sqrt[4]{x} + o(\sqrt[4]{x}))}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{x^2(1+o(1))}{x^\alpha x^{\frac{1}{4}}(1+o(1))} = \frac{3}{2}x^{\frac{7}{4}-\alpha}(1+o(1))$$

per cui l'integrale su $(0,1)$ converge solo per $\alpha < \dfrac{11}{4}$.

Per la convergenza su $(1,+\infty)$ si fanno i seguenti cambiamenti. Poiché $\ln(1+\sqrt[4]{x}) \sim (1/4)\ln(x)$ per $x \to +\infty$ si può confrontare la funzione con una logaritmico-armonica

$$f(x) \leq \frac{2}{x^\alpha \ln(1+\sqrt[4]{x})} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{x^\alpha \ln(x)}$$

che è nota convergere su $(1,+\infty)$ per $\alpha > 1$. Invece per $\alpha \leq 1$ l'integrale diverge e questo può essere visto in modo analogo a quanto fatto nell' esercizio 2 del Tema X.

Concludendo, l'integrale dato converge se e solo se $1 < \alpha < \dfrac{11}{4}$.

Esercizio 3. Data la funzione $F(x) = 2\int_0^x t\arctan(t)\,dt - 1$, $x \in \mathbb{R}$

(1) determinare gli insiemi in cui F è convessa;

(2) determinare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x^\beta}$;

(3) determinare il valore della derivata nona di F in $x = 0$.

Soluzione. La soluzione è analoga a quella dell'esercizio 3 del Tema X considerando che $F = 2\tilde{F} - 1$, dove $\tilde{F}$ è la funzione dell'esercizio 2 del tema X.

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema Z

27 gennaio 2020

Esercizio 1. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni in campo complesso:

$$\text{(a) } 12z^2 + 15|z|^2 - 3 = 0; \qquad \text{(b) } (z+2)^3 + (z-2)^3 = 0.$$

Soluzione.

(a) Si trovano le stesse soluzioni dell'esercizio 1 del tema X.

(b) Si usa l'identità $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$.

$$0 = (z+2)^3 + (z-2)^3 = 2z(2z^2 + 8 - z^2 + 4) = 2z(z^2 + 12).$$

Risolvendo si ottiene subito che le soluzioni sono $0, -2\sqrt{3}i, 2\sqrt{3}i$.

Esercizio 2. Studiare al variare del parametro reale α la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^3(x)}{x^\alpha \ln^3(1+\sqrt[4]{x^3})}\, dx.$$

Per la convergenza su $(0,1)$ si fanno i seguenti cambiamenti

$$f(x) = \frac{1-\cos^3(x)}{x^\alpha \ln(1+\sqrt[4]{x})} = \frac{\frac{3x^2}{2} + o(x^2)}{x^\alpha(\sqrt[4]{x^3} + o(\sqrt[4]{x^3}))^3}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{x^2(1+o(1))}{x^\alpha x^{\frac{9}{4}}(1+o(1))} = \frac{3}{2}x^{\frac{9}{4}-\alpha}(1+o(1))$$

per cui l'integrale su $(0,1)$ converge solo per $\alpha < \frac{3}{4}$.

Per la convergenza su $(1,+\infty)$ si fanno i seguenti cambiamenti. Poiché $\ln(1+\sqrt[4]{x^3}) \sim (3/4)\ln(x)$ per $x \to +\infty$ si può confrontare la funzione con una logaritmico-armonica

$$f(x) \leq \frac{2}{x^\alpha \ln(1+\sqrt[4]{x^3})^3} \sim \frac{1}{x^\alpha \ln(\, x)}$$

che è nota convergere su $(1,+\infty)$ per $\alpha \leq 1$. Invece per $\alpha < 1$ l'integrale diverge e questo può essere visto in modo analogo a quanto fatto nell' esercizio 2 del Tema X.

Concludendo, l'integrale dato converge se e solo se $1 \leq \alpha < \frac{3}{4}$.

Esercizio 3. Data la funzione $F(x) = 1 - \int_0^x t \arctan(t)\, dt$, $x \in \mathbb{R}$

(1) determinare gli insiemi in cui F è convessa;

(2) determinare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x^\beta}$;

(3) determinare il valore della derivata nona di F in $x = 0$.

Soluzione. La soluzione è analoga a quella dell'esercizio 3 del Tema X considerando che $F = 1 - \tilde{F}$, dove $\tilde{F}$ è la funzione dell'esercizio 2 del tema X.