Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema X

19 febbraio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Determinare al variare del parametro reale x il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)-n\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)(x+2)^n.$$

Soluzione. Ponendo $y=x+2$ ci si riduce a studiare la serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n y^n$ con

$$a_n=\tan\left(\frac{1}{n}\right)-n\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

Si usano gli sviluppi $\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$, $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ e si deduce

$$a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)-n\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^4}+o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big)=\frac{5}{6n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

Si calcola quindi che

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{5}{6n^3}(1+o(1))}=1.$$

Dalla teoria delle serie di potenze si ha quindi che la serie converge per $|y|=|x+2|<1$. Per $|x+2|=1$ la serie converge per confronto asintotico con una serie armonica di esponente 3.

Si conclude che la serie data converge (esclusivamente) per x che varia nell'intervallo $-3\le x\le -1$.

Esercizio 2. Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{4\sin^3(x)}{3y^2(x)(1+\cos^2(x))} \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \end{cases}$$

trovandone eventuali massimi/minimi assoluti su $[0, 2\pi]$.

Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili; si procede ad integrare rispetto ad x l'uguaglianza di funzioni

$$3y^2(x)y'(x) = \frac{4\sin^3(x)}{(1+\cos^2(x))}.$$

Con il cambio di variabile $\cos(x) = z$ ci si riduce ad integrare

$$\int \frac{z^2-1}{1+z^2}\, dz = z - 2\arctan(z) + c$$

e si ottiene

$$y^3(x) = \int 3y^2(x)y'(x)\, dx = \int 4\frac{\sin^3(x)}{(1+\cos^2(x))}\, dx = 4(\cos(x) - 2\arctan(\cos(x))) + c,$$

ossia

$$y(x) = \sqrt[3]{c4(\cos(x) - 2\arctan(\cos(x)))}.$$

Si calcola poi la costante c imponendo la condizione iniziale e si ha

$$y(x) = \sqrt[3]{\pi^3 + 4(\cos(x) - 2\arctan(\cos(x)))}.$$

La funzione sopra è continua su $[0, 2\pi]$ per cui ammette massimo e minimo. Per trovarli basta studiare il segno della derivata fornita direttamente dall'eq. differenziale iniziale. Il segno della derivata coincide con il segno di $\sin(x)$ per cui il punto di massimo è π ed i punti di minimo sono $0, 2\pi$ ed i valori massimo e minimo sono rispettivamente $\sqrt[3]{\pi^3 + 2\pi - 4}$, $\sqrt[3]{\pi^3 - 2\pi + 4}$.

Esercizio 3. Determinare, in forma esponenziale ed algebrica, i numeri complessi soluzione dell'equazione $z^4 - (1+i)z^2 + i = 0$.
Dopo aver tracciato le soluzioni sul piano di Gauss determinare l'area del poligono di cui esse sono i vertici.
Soluzione. Si introduce la nuova variabile $w = z^2$ e si calcolano le soluzioni dell'equazione di secondo grado $w^2 - (1+i)w^2 + i = 0$.

Il delta dell'equazione sopra è uguale a $(1+i)^2 - 4i = -2i = i^2(1+i)^2$ da cui $w_\pm = \dfrac{(1+i) \pm i(1+i)}{2}$; si ha $w_+ = i$ e $w_- = 1$. Le soluzioni tali che $z^2 = w_+ = i$ sono $z_1 = \dfrac{(1+i)}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = -\dfrac{(1+i)}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$, le soluzioni tali che $z^2 = w_- = 1$ sono invece $z_3 = 1 = e^{i0}$, $z_4 = -1 = e^{i\pi}$.

Il disegno che si ottiene sul piano di Gauss è il rettangolo ottenuto come unione del triangolo di vertici $(-1,0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (1,0)$ ed il suo simmetrizzato rispetto all'origine. L'area è quindi data da base per altezza del primo triangolo ed è uguale a $\sqrt{2}$.

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema Y

19 febbraio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Determinare al variare del parametro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tan\left(\frac{1}{n^2}\right) - n \log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \right) \frac{1}{x^n}.$$

Soluzione. Ponendo $y = \dfrac{1}{x}$ ci si riduce a studiare la serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n y^n$ con

$$a_n = \tan\left(\frac{1}{n^2}\right) - n \log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right).$$

Si usano gli sviluppi $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e si deduce

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3n^6} + o\Big(\frac{1}{n^6}\Big) - n\Big(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{2n^6} + o\Big(\frac{1}{n^6}\Big)\Big) = \frac{1}{2n^5} + o\Big(\frac{1}{n^5}\Big).$$

Si calcola quindi che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2n^5}(1 + o(1))} = 1.$$

Dalla teoria delle serie di potenze si ha quindi che la serie converge per $|x| > 1$. Per $|x| = 1$ la serie converge per confronto asintotico con una serie armonica di esponente 5.

Si conclude che la serie data converge (esclusivamente) per $x \geq 1$ oppure per $x \leq -1$.

Esercizio 2. Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{4\sin(x)}{3y^2(x)(1+\cos^2(x))} \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \end{cases}$$

trovandone eventuali massimi/minimi assoluti sul suo dominio.

Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili; si procede ad integrare rispetto ad x l'uguaglianza di funzioni

$$3y^2(x)y'(x) = \frac{4\sin(x)}{(1+\cos^2(x))}.$$

Con il cambio di variabile $\cos(x) = z$ ci si riduce ad integrare

$$\int \frac{1}{1+z^2}\,dz = \arctan(z) + c$$

e si ottiene

$$y^3(x) = \int 3y^2(x)y'(x)\,dx = \int -4\frac{-\sin(x)}{(1+\cos^2(x))}\,dx = -4\arctan(\cos(x)) + c,$$

ossia

$$y(x) = \sqrt[3]{c - 4\arctan(\cos(x))}.$$

Si calcola poi la costante c imponendo la condizione iniziale e si ha

$$y(x) = \sqrt[3]{\pi^3 - 4\arctan(\cos(x))}.$$

La funzione sopra è 2π-periodica e continua su $[0, 2\pi]$ per cui ammette massimo e minimo. Per trovarli basta studiare il segno della derivata fornita direttamente dall'eq. differenziale iniziale. Il segno della derivata coincide con il segno di $\sin(x)$ per cui il punto di massimo è π ed i punti di minimo sono $0, 2\pi$ ed i valori massimo e minimo sono rispettivamente $\sqrt[3]{\pi^3+\pi}$, $\sqrt[3]{\pi^3-\pi}$.

Esercizio 3. Determinare, in forma esponenziale ed algebrica, i numeri complessi soluzione dell'equazione $z^4 + (1+i)z^2 + i = 0$.
Dopo aver tracciato le soluzioni sul piano di Gauss determinare l'area del poligono di cui esse sono i vertici.
Soluzione. Si introduce la nuova variabile $w = z^2$ e si calcolano le soluzioni dell'equazione di secondo grado $w^2 + (1+i)w^2 + i = 0$.

Il delta dell'equazione sopra è uguale a $(1+i)^2 - 4i = -2i = i^2(1+i)^2$ da cui $w_\pm = \dfrac{-(1+i) \pm i(1+i)}{2}$; si ha $w_+ = -i$ e $w_- = -1$. Le soluzioni tali che $z^2 = w_+ = -i$ sono $z_1 = \dfrac{(-1+i)}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = \dfrac{(1-i)}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{7\pi}{4}}$, le soluzioni tali che $z^2 = w_- = -1$ sono invece $z_3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_4 = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Il disegno che si ottiene sul piano di Gauss è il rettangolo ottenuto come unione del triangolo di vertici $(0,1), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (0,-1)$ ed il suo simmetrizzato rispetto all'origine. L'area è quindi data da base per altezza del primo triangolo ed è uguale a $\sqrt{2}$.

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema Z

19 febbraio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Determinare al variare del parametro reale x il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - n \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \right) x^{3n}.$$

Soluzione. Ponendo $y = x^3$ ci si riduce a studiare la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n y^n$ con

$$a_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) - n \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Si usano gli sviluppi $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e si deduce

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big) - n\Big(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big) = \frac{5}{6n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

Si calcola quindi che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{5}{6n^3}}(1 + o(1)) = 1.$$

Dalla teoria delle serie di potenze si ha quindi che la serie converge per $|x| < 1$. Per $|x| = 1$ la serie converge per confronto asintotico con una serie armonica di esponente 3.

Si conclude che la serie data converge (esclusivamente) per x che varia nell'intervallo $-1 \leq x \leq -1$.

Esercizio 2. Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{4\sin(x)}{3y^2(x)(1+\cos^2(x))} \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \end{cases}$$

trovandone eventuali massimi/minimi assoluti sul suo dominio.
Soluzione. La soluzione è la stessa dell'esercizio 2 del Tema Y.

Esercizio 3. Determinare, in forma esponenziale ed algebrica, i numeri complessi soluzione dell'equazione $z^4 - (1+i)z^2 + i = 0$.
Dopo aver tracciato le soluzioni sul piano di Gauss determinare l'area del poligono di cui esse sono i vertici.
Soluzione. La soluzione è la stessa dell'esercizio 3 del Tema X.