Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema X

13 gennaio 2020

Esercizio 1. Determinare tutte le soluzioni di

$$y'''(x) + 8y(x) = (x+1)e^{2x} + 4x^3 \qquad \text{tali che } \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x^4} \text{ esista finito.}$$

Soluzione. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono generate da $x^h e^{ax}\cos(bx), x^h e^{ax}\sin(bx)$ per $\lambda = a + ib$ radice di $\lambda^3 + 8 = 0$ ed $0 \le h <$ molteplicità della radice $a + ib$. Le radici terze di -8 sono uguali a $-2, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$ per cui una base delle soluzioni dell'omogenea è data da $e^{-2x}, e^x\cos(\sqrt{3}x), e^x\sin(\sqrt{3}x)$.
Cerchiamo una soluzione particolare della forma polinomio di primo grado per e^{2x} sommato a polinomio di terzo grado. Svolgendo i conti si trova

$$y_p(x) = \Big(\frac{x}{16} + \frac{1}{64}\Big)e^{2x} + \frac{x^3}{2} - \frac{3}{8}.$$

Le soluzioni dell'eq. differenziale iniziale sono quindi tutte e sole della forma

$$y_p(x) + \alpha e^{-2x} + \beta e^x \cos(\sqrt{3}x) + \gamma e^x \sin(\sqrt{3}x) \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Dato che $\lim_{x\to+\infty} \frac{y_p(x)}{x^4} = +\infty$ ed $y_p(x)$ tende a $+\infty$ come xe^{2x} i termini con $\beta e^x\cos(\sqrt{3}x) + \gamma e^x \sin(\sqrt{3}x)$ non possono compensare questo infinito per nessun valore di β e γ (analogamente non può farlo il termine αe^{-2x} che è infinitesimo a $+\infty$ per ogni α).

Si deduce che non esistono soluzioni con $\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x^4}$ finito.

Esercizio 2.

(1) Dato il polinomio $P(z) = z^7 + 32z^2$ trovarne le radici in $\mathbb{C}$ e fattorizzarlo in $\mathbb{R}$.
(2) Dette z_1, z_2, z_3 le radici di P non nulle con $\mathrm{Im}(z_i) \leq 0$ $i = 1, 2, 3$, scrivere in forma esponenziale il numero complesso $w = z_1 z_2 z_3$.

Soluzione. Si vede subito che si può scomporre $P(z) = z^2(z^5 + 32)$ per cui le radici di P sono 6: la prima radice è $w_0 = 0$ che ha molteplicità 2, le altre 5 radici sono le radici quinte del numero -32. Dato che $-32 = 2^8 e^{i\pi}$ si ottiene subito che

$$w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{5}}, w_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{5}}, w_3 = 2e^{i\pi} = -2, w_4 = 2e^{i\frac{7\pi}{5}}, w_5 = 2e^{i\frac{9\pi}{5}}$$

e le radici sopra coincidono anche con i vertici di un pentagono iscritto nella circonferenza di raggio 2 con un vertice coincidente con il punto $(-2, 0)$. Disegnandole sulla circonferenza si deduce che le radici sopra con parte immaginaria non positiva sono

$$w_4 = 2e^{i\frac{7\pi}{5}} = z_1, w_5 = 2e^{i\frac{9\pi}{5}} = z_2, w_3 = 2e^{i\pi} = -2 = z_3,$$

inoltre risulta $w_4 = \overline{w_2}$ e $w_5 = \overline{w_1}$.

Il numero complesso $w = z_1 z_2 z_3$ è quindi uguale a

$$w = 2e^{i\frac{7\pi}{5}} 2e^{i\frac{9\pi}{5}} 2e^{i\pi} = 8e^{i\frac{21\pi}{5}} = 8e^{i\frac{\pi}{5}}.$$

Per quanto riguarda la fattorizzazione di P, essendo un polinomio a coefficienti reali, è noto che ha radici puramente reali oppure se ha una radice complessa non reale ha anche la sua coniugata; inoltre si può scrivere come prodotto di polinomi a coefficienti reali, ognuno dei quali di grado minore uguale a 2 (a seconda che la radice sia reale o meno) elevato alla molteplicità della radice. La stessa cosa si può ottenere partendo dalla fattorizzazione di P su $\mathbb{C}$ e raggruppando i fattori con radici coniugate.

$$\begin{gathered}
P(z) = z^2(z - w_1)(z - w_5)(z - w_2)(z - w_4)(z - w_3) \\
= z^2((z - \mathrm{Re}(w_1))^2 + (\mathrm{Im}(w_1))^2)((z - \mathrm{Re}(w_2))^2 + (\mathrm{Im}(w_2))^2)(z + 2) = \\
z^2(z+2)\Big((z - 2\cos(\frac{\pi}{5}))^2 + (2\sin(\frac{\pi}{5}))^2\Big)\Big((z - 2\cos(\frac{3\pi}{5}))^2 + (2\sin(\frac{3\pi}{5}))^2\Big) \\
= z^2(z+2)\Big(z^2 - 4\cos(\frac{\pi}{5})z + 4\Big)\Big(z^2 - 4\cos(\frac{3\pi}{5})z + 4\Big) = P(z).
\end{gathered}$$

Si noti che facendo la divisione $z^5 + 32 = (z+2)(z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 8z + 16)$ ed uguagliando

$$(z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 8z + 16) = \Big(z^2 - 4\cos(\frac{\pi}{5})z + 4\Big)\Big(z^2 - 4\cos(\frac{3\pi}{5})z + 4\Big)$$

si possono calcolare esplicitamente i valori $\cos(\frac{\pi}{5})$, $\cos(\frac{3\pi}{5})$ che risultando uguali a $(1 + \sqrt{5})/4, (1 - \sqrt{5})/4$.

Esercizio 3. Determinare lo sviluppo al terzo ordine in $x = 0$ di

$$f(x) = \arctan(\sin^2(x)) - \sin^2(\arctan(x))$$

e calcolare al variare di $\alpha > 0$ esistenza e valore di $\lim_{x\to 0+} f(x)x^{-\alpha}$.
Studiare poi al variare di $y \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y^n f\Big(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\Big).$$

Soluzione. Si usano gli sviluppi noti

$$\sin(x) = x + o(x^2) \Rightarrow \sin^2(x) = (x + o(x^2))^2 = x^2 + o(x^3);$$

$$\arctan(x) = x + o(x^2) \Rightarrow \arctan(\sin^2(x)) = x^2 + o(x^3) + o((x^2 + o(x^3))^2) = x^2 + o(x^3);$$

$$\sin^2(\arctan(x)) = \sin^2(x + o(x^2)) = (x + o(x^2))^2 + o((x + o(x^2))^2) = x^2 + o(x^3)$$

e si ottiene che $f(x) = \arctan(\sin^2(x)) - \sin^2(\arctan(x)) = x^2 + o(x^3) - (x^2 + o(x^3)) = o(x^3)$.

Per calcolare il limite proposto serve sapere qual è la prima potenza di x con coefficiente non nullo presente nello sviluppo di Taylor di f in $x = 0$. Il conto precedente assicura che questa potenza è maggiore stretta di 3. Passiamo quindi allo sviluppo successivo, di ordine 4. Si procede raffinando i conti precedenti all'ordine superiore:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow \sin^2(x) = \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4);$$

usando che $\arctan(x)$ è una funziona dispari e lo sviluppo di $\sin^2(x)$ sopra si ha poi

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \Rightarrow \arctan(\sin^2(x)) = \arctan\Big(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\Big) =$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - \frac{1}{3}\Big(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\Big)^3 + o((x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4))^3);$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Analogamente

$$\sin^2(\arctan(x)) = \sin^2\Big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\Big) = \Big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\Big)^2 - \frac{1}{3}\Big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\Big)^4 +$$

$$+ o\Big(\Big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\Big)^4\Big) = x^2 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) = x^2 - x^4 + o(x^4).$$

Si conclude che $f(x) = \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$. Con questa informazione si deriva subito che il limite cercato è uguale a 0 se $\alpha < 4$, uguale a $\frac{2}{3}$ se $\alpha = 4$, uguale a $+\infty$ se $\alpha > 4$.

Passiamo ora allo studio della serie.

Dal conto precedente si ha che

$$f\Big(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\Big) = \frac{2}{3}\frac{1}{n} + o\big(\frac{1}{n}\big).$$

Si tratta quindi di una serie di potenze e si calcola

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{3}\frac{1}{n} + o\big(\frac{1}{n}\big)} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\sqrt[n]{1+o(1))} = 1.$$

Dai teoremi noti si deduce che la serie in oggetto converge assolutamente per $|y| < 1$. Per $y = 1$ la serie diventa equivalente ad una serie armonica di esponente 1 per cui diverge a $+\infty$. Per $y = -1$ la serie si compone di due termini

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{3}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

il primo converge per il criterio di Leibniz, per studiare il secondo termine si usa invece il fatto che il termine $o(1/n)$ si può specificare più in dettaglio usando uno sviluppo migliore per $f(x)$ in $x = 0$. Infatti la funzione f è una funzione pari per cui il suo sviluppo di ordine 5 coincide con lo sviluppo di ordine 4, vale a dire $f(x) = \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^5)$. Da questo deriva che

$$f\Big(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\Big) = \frac{2}{3}\frac{1}{n} + o\big(\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}\big).$$

e il secondo termine sopra diventa la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n o\Big(\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}\Big)$$

che converge assolutamente per confronto con la serie armonica di esponente $5/4$.

Concludendo la serie converge solo per $-1 \leq y < 1$

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema Y

13 gennaio 2020

Esercizio 1. Determinare tutte le soluzioni di

$$y'''(x) - 8y(x) = (x+1)e^{2x} + 4x^3 \qquad \text{tali che } \lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x^4} \text{ esista finito.}$$

Soluzione. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono generate da $x^h e^{ax}\cos(bx), x^h e^{ax}\sin(bx)$ per $\lambda = a+ib$ radice di $\lambda^3 - 8 = 0$ ed $0 \le h <$ molteplicità della radice $a+ib$. Le radici terze di 8 sono uguali a $2, -1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}$ per cui una base delle soluzioni dell'omogenea è data da $e^{2x}, e^{-x}\cos(\sqrt{3}x), e^{-x}\sin(\sqrt{3}x)$.

Cerchiamo una soluzione particolare della forma polinomio di primo grado per xe^{2x} sommato a polinomio di terzo grado. La scelta di mettere un fattore x dipende dal fatto che e^{2x} è soluzione dell'omogenea. Svolgendo i conti si trova

$$y_p(x) = \Big(\frac{x^2}{24} + \frac{x}{24}\Big)e^{2x} - \frac{x^3}{2} - \frac{3}{8}.$$

Le soluzioni dell'eq. differenziale iniziale sono quindi tutte e sole della forma

$$y_p(x) + \alpha e^{2x} + \beta e^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + \gamma e^{-x}\sin(\sqrt{3}x) \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Dato che $\lim_{x\to-\infty} \frac{y_p(x)}{x^4} = 0$ rimane da vedere per quali α, β, γ le soluzioni dell'omogenea divise per x^4 hanno limite finito a $-\infty$.

Si nota che i termini con $\beta e^{-x}\cos(\sqrt{3}x)/x^4 + \gamma e^{-x}\sin(\sqrt{3}x)/x^4$ non parte sono limitati in un intorno di $-\infty$ a meno di avere $\beta = \gamma = 0$: infatti se $\beta \ne 0$ presa la successione $x_n = -\frac{2\pi n}{\sqrt{3}}$ si ha che $x_n \to -\infty$ e le funzioni sopra hanno limite $+\infty(\textit{segno}\beta)$ lungo la successione x_n per ogni γ; d'altra se $\gamma \ne 0$ presa la successione $x_n = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi n}{\sqrt{3}}$ si ha che $x_n \to -\infty$ e le funzioni sopra hanno limite $+\infty(\textit{segno}\gamma)$ lungo la successione x_n per ogni β.

Rimane il termine αe^{2x} che invece è infinitesimo a $+\infty$ per ogni α, per cui rimane infinitesimo anche diviso x^4. Si deduce che le uniche soluzioni con $\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x^4}$ finito sono date da

$$\Big(\frac{x^2}{24} + \frac{x}{24}\Big)e^{2x} - \frac{x^3}{2} - \frac{3}{8} + \alpha e^{2x},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2.

(1) Dato il polinomio $P(z) = z^7 - 32z^2$ trovarne le radici in $\mathbb{C}$ e fattorizzarlo in $\mathbb{R}$.
(2) Dette z_1, z_2, z_3 le radici di P non nulle con $\mathrm{Im}(z_i) \leq 0$ $i = 1, 2, 3$, scrivere in forma esponenziale il numero complesso $w = z_1 z_2 z_3$.

Soluzione. Si vede subito che si può scomporre $P(z) = z^2(z^5 - 32)$ per cui le radici di P sono 6: la prima radice è $w_0 = 0$ che ha molteplicità 2, le altre 5 radici sono le radici quinte del numero 32. Dato che $32 = 2^8 e^{i2\pi}$ si ottiene subito che

$$w_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{5}}, w_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{5}}, w_3 = 2e^{i2\pi} = 2, w_4 = 2e^{i\frac{6\pi}{5}}, w_5 = 2e^{i\frac{8\pi}{5}}$$

e le radici sopra coincidono anche con i vertici di un pentagono iscritto nella circonferenza di raggio 2 con un vertice coincidente con il punto $(2, 0)$. Disegnandole sulla circonferenza si deduce che le radici sopra con parte immaginaria non positiva sono

$$w_4 = 2e^{i\frac{6\pi}{5}} = z_1, w_5 = 2e^{i\frac{8\pi}{5}} = z_2, w_3 = 2e^{i\pi} = 2 = z_3,$$

inoltre risulta $w_4 = \overline{w_2}$ e $w_5 = \overline{w_1}$.

Il numero complesso $w = z_1 z_2 z_3$ è quindi uguale a

$$w = 2e^{i\frac{6\pi}{5}} 2e^{i\frac{8\pi}{5}} 2e^{i2\pi} = 8e^{i\frac{4\pi}{5}}.$$

Per quanto riguarda la fattorizzazione di P, essendo un polinomio a coefficienti reali, è noto che ha radici puramente reali oppure se ha una radice complessa non reale ha anche la sua coniugata; inoltre si può scrivere come prodotto di polinomi a coefficienti reali, ognuno dei quali di grado minore uguale a 2 (a seconda che la radice sia reale o meno) elevato alla molteplicità della radice. La stessa cosa si può ottenere partendo dalla fattorizzazione di P su $\mathbb{C}$ e raggruppando i fattori con radici coniugate.

$$\begin{gathered} P(z) = z^2(z - w_1)(z - w_5)(z - w_2)(z - w_4)(z - w_3) \\ = z^2((z - \mathrm{Re}(w_1))^2 + (\mathrm{Im}(w_1))^2)((z - \mathrm{Re}(w_2))^2 + (\mathrm{Im}(w_2))^2)(z - 2) = \\ z^2(z-2)\Big((z - 2\cos(\frac{2\pi}{5}))^2 + (2\sin(\frac{2\pi}{5}))^2\Big)\Big((z - 2\cos(\frac{4\pi}{5}))^2 + (2\sin(\frac{4\pi}{5}))^2\Big) \\ = z^2(z-2)\Big(z^2 - 4\cos(\frac{2\pi}{5})z + 4\Big)\Big(z^2 - 4\cos(\frac{4\pi}{5})z + 4\Big) = P(z). \end{gathered}$$

Si noti che facendo la divisione $z^5 - 32 = (z - 2)(z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 8z + 16)$ ed uguagliando

$$(z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 8z + 16) = \Big(z^2 - 4\cos(\frac{2\pi}{5})z + 4\Big)\Big(z^2 - 4\cos(\frac{4\pi}{5})z + 4\Big)$$

si possono calcolare esplicitamente i valori $\cos(\frac{2\pi}{5})$, $\cos(\frac{4\pi}{5})$ che risultando uguali a $(\sqrt{5} - 1)/4, -(1 + \sqrt{5})/4$.

Esercizio 3. Determinare lo sviluppo al terzo ordine in $x = 0$ di

$$f(x) = \arctan(\sin^2(x)) - \sin^2(\arctan(x))$$

e calcolare al variare di $\alpha > 0$ esistenza e valore di $\lim_{x \to 0+} f(x) x^{-\alpha}$.
Studiare poi al variare di $y \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y^n f\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\Big).$$

Soluzione.

La prima parte è uguale a quella dell'esercizio del Tema X.

Passiamo ora allo studio della serie.

Dal conto precedente si ha che

$$f\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\Big) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} + o\big(\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\big).$$

Si tratta quindi di una serie di potenze e si calcola

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} + o\big(\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\big)} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{(\sqrt[n]{n})^4}} \sqrt[n]{1 + o(1))} = 1.$$

Dai teoremi noti si deduce che la serie in oggetto converge assolutamente per $|y| < 1$. Per $y = 1$ la serie diventa equivalente ad una serie armonica di esponente $4/3$ per cui converge. Per $y = -1$ la serie converge perchè converge assolutamente.

Concludendo la serie converge solo per $-1 \leq y \leq 1$.

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema Z

13 gennaio 2020

Esercizio 1. Determinare tutte le soluzioni di

$$y'''(x) + 8y(x) = (x+1)e^{2x} - 2x^3 \quad \text{tali che } \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x^4} \text{ esista finito.}$$

Soluzione. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono generate da $x^h e^{ax}\cos(bx), x^h e^{ax}\sin(bx)$ per $\lambda = a+ib$ radice di $\lambda^3 + 8 = 0$ ed $0 \le h <$ molteplicità della radice $a+ib$. Le radici terze di -8 sono uguali a $-2, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$ per cui una base delle soluzioni dell'omogenea è data da $e^{-2x}, e^x\cos(\sqrt{3}x), e^x\sin(\sqrt{3}x)$.

Cerchiamo una soluzione particolare della forma polinomio di primo grado per e^{2x} sommato a polinomio di terzo grado. Svolgendo i conti si trova

$$y_p(x) = \left(\frac{x}{16} + \frac{1}{64}\right)e^{2x} - \frac{x^3}{4} + \frac{3}{16}.$$

Le soluzioni dell'eq. differenziale iniziale sono quindi tutte e sole della forma

$$y_p(x) + \alpha e^{-2x} + \beta e^x \cos(\sqrt{3}x) + \gamma e^x \sin(\sqrt{3}x) \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Dato che $\lim_{x\to+\infty} \frac{y_p(x)}{x^4} = +\infty$ ed $y_p(x)$ tende a $+\infty$ come xe^{2x} i termini con $\beta e^x\cos(\sqrt{3}x) + \gamma e^x \sin(\sqrt{3}x)$ non possono compensare questo infinito per nessun valore di β e γ (analogamente non può farlo il termine αe^{-2x} che è infinitesimo a $+\infty$ per ogni α).

Si deduce che non esistono soluzioni con $\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x^4}$ finito.

Esercizio 2.

(1) Dato il polinomio $P(z) = z^7 + 32z^2$ trovarne le radici in $\mathbb{C}$ e fattorizzarlo in $\mathbb{R}$.

(2) Dette z_1, z_2, z_3 le radici di P non nulle con $\mathrm{Im}(z_i) \geq 0$ $i = 1, 2, 3$, scrivere in forma esponenziale il numero complesso $w = z_1 z_2 z_3$.

Soluzione. Si vede subito che si può scomporre $P(z) = z^2(z^5 + 32)$ per cui le radici di P sono 6: la prima radice è $w_0 = 0$ che ha molteplicità 2, le altre 5 radici sono le radici quinte del numero -32. Dato che $-32 = 2^8 e^{i\pi}$ si ottiene subito che

$$w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{5}}, w_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{5}}, w_3 = 2e^{i\pi} = -2, w_4 = 2e^{i\frac{7\pi}{5}}, w_5 = 2e^{i\frac{9\pi}{5}}$$

e le radici sopra coincidono anche con i vertici di un pentagono iscritto nella circonferenza di raggio 2 con un vertice coincidente con il punto $(-2, 0)$. Disegnandole sulla circonferenza si deduce che le radici sopra con parte immaginaria non negativa sono

$$w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{5}} = z_1, w_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{5}} = z_2, w_3 = 2e^{i\pi} = -2 = z_3,$$

inoltre risulta $w_4 = \overline{w_2}$ e $w_1 = \overline{w_5}$. Il numero complesso $w = z_1 z_2 z_3$ è quindi uguale a

$$w = 2e^{i\frac{\pi}{5}} 2e^{i\frac{3\pi}{5}} 2e^{i\pi} = 8e^{i\frac{9\pi}{5}}.$$

Per quanto riguarda la fattorizzazione di P, essendo un polinomio a coefficienti reali, è noto che ha radici puramente reali oppure se ha una radice complessa non reale ha anche la sua coniugata; inoltre si può scrivere come prodotto di polinomi a coefficienti reali, ognuno dei quali di grado minore uguale a 2 (a seconda che la radice sia reale o meno) elevato alla molteplicità della radice. La stessa cosa si può ottenere partendo dalla fattorizzazione di P su $\mathbb{C}$ e raggruppando i fattori con radici coniugate.

$$\begin{gathered} P(z) = z^2(z - w_1)(z - w_5)(z - w_2)(z - w_4)(z - w_3) \\ = z^2((z - \mathrm{Re}(w_1))^2 + (\mathrm{Im}(w_1))^2)((z - \mathrm{Re}(w_2))^2 + (\mathrm{Im}(w_2))^2)(z + 2) = \\ z^2(z+2)\Big((z - 2\cos(\frac{\pi}{5}))^2 + (2\sin(\frac{\pi}{5}))^2\Big)\Big((z - 2\cos(\frac{3\pi}{5}))^2 + (2\sin(\frac{3\pi}{5}))^2\Big) \\ = z^2(z+2)\Big(z^2 - 4\cos(\frac{\pi}{5})z + 4\Big)\Big(z^2 - 4\cos(\frac{3\pi}{5})z + 4\Big) = P(z). \end{gathered}$$

Si noti che facendo la divisione $z^5 + 32 = (z+2)(z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 8z + 16)$ ed uguagliando

$$(z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 8z + 16) = \Big(z^2 - 4\cos(\frac{\pi}{5})z + 4\Big)\Big(z^2 - 4\cos(\frac{3\pi}{5})z + 4\Big)$$

si possono calcolare esplicitamente i valori $\cos(\frac{\pi}{5})$, $\cos(\frac{3\pi}{5})$ che risultando uguali a $(1 + \sqrt{5})/4, (1 - \sqrt{5})/4$.

Esercizio 3. Determinare lo sviluppo al terzo ordine in $x = 0$ di

$$f(x) = \arctan(\sin^2(x)) - \sin^2(\arctan(x))$$

e calcolare al variare di $\alpha > 0$ esistenza e valore di $\lim_{x\to 0+} f(x)x^{-\alpha}$.
Studiare poi al variare di $y \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y^n f\Big(\frac{1}{\sqrt[5]{n^2}}\Big).$$

Soluzione.

La prima parte è uguale a quella dell'esercizio del Tema X.

Passiamo ora allo studio della serie.

Dal conto precedente si ha che

$$f\Big(\frac{1}{\sqrt[5]{n^2}}\Big) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[5]{n^8}} + o\big(\frac{1}{\sqrt[5]{n^8}}\big).$$

Si tratta quindi di una serie di potenze e si calcola

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[5]{n^8}} + o\big(\frac{1}{\sqrt[5]{n^8}}\big)} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt[5]{(\sqrt[n]{n})^8}}\sqrt[n]{1+o(1))} = 1.$$

Dai teoremi noti si deduce che la serie in oggetto converge assolutamente per $|y| < 1$. Per $y = 1$ la serie diventa equivalente ad una serie armonica di esponente $8/5$ per cui converge. Per $y = -1$ la serie converge perchè converge assolutamente.

Concludendo la serie converge solo per $-1 \le y \le 1$.

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema W

13 gennaio 2020

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Determinare tutte le soluzioni di

$$y'''(x) - 8y(x) = (x+1)e^{2x} + 2x^3 \quad \text{tali che } \lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x^4} \text{ esista finito.}$$

Soluzione. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono generate da $x^h e^{ax}\cos(bx), x^h e^{ax}\sin(bx)$ per $\lambda = a + ib$ radice di $\lambda^3 - 8 = 0$ ed $0 \le h <$ molteplicità della radice $a + ib$. Le radici terze di 8 sono uguali a $2, -1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}$ per cui una base delle soluzioni dell'omogenea è data da $e^{2x}, e^{-x}\cos(\sqrt{3}x), e^{-x}\sin(\sqrt{3}x)$.
Cerchiamo una soluzione particolare della forma polinomio di primo grado per xe^{2x} sommato a polinomio di terzo grado. La scelta di mettere un fattore x dipende dal fatto che e^{2x} è soluzione dell'omogenea. Svolgendo i conti si trova

$$y_p(x) = \Big(\frac{x^2}{24} + \frac{x}{24}\Big)e^{2x} - \frac{x^3}{4} - \frac{3}{16}.$$

Le soluzioni dell'eq. differenziale iniziale sono quindi tutte e sole della forma

$$y_p(x) + \alpha e^{2x} + \beta e^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + \gamma e^{-x}\sin(\sqrt{3}x) \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Dato che $\lim_{x\to-\infty} \frac{y_p(x)}{x^4} = 0$ rimane da vedere per quali α, β, γ le soluzioni dell'omogenea divise per x^4 hanno limite finito a $-\infty$.

Si nota che i termini con $\beta e^{-x}\cos(\sqrt{3}x)/x^4 + \gamma e^{-x}\sin(\sqrt{3}x)/x^4$ non parte sono limitati in un intorno di $-\infty$ a meno di avere $\beta = \gamma = 0$: infatti se $\beta \neq 0$ presa la successione $x_n = -\frac{2\pi n}{\sqrt{3}}$ si ha che $x_n \to -\infty$ e le funzioni sopra hanno limite $+\infty(\mathit{segno}\beta)$ lungo la successione x_n per ogni γ; d'altra se $\gamma \neq 0$ presa la successione $x_n = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi n}{\sqrt{3}}$ si ha che $x_n \to -\infty$ e le funzioni sopra hanno limite $+\infty(\mathit{segno}\gamma)$ lungo la successione x_n per ogni β.

Rimane il termine αe^{2x} che invece è infinitesimo a $+\infty$ per ogni α, per cui rimane infinitesimo anche diviso x^4. Si deduce che le uniche soluzioni con $\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x^4}$ finito sono date da

$$\Big(\frac{x^2}{24} + \frac{x}{24}\Big)e^{2x} - \frac{x^3}{4} - \frac{3}{16} + \alpha e^{2x}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.
Esercizio 2.

(1) Dato il polinomio $P(z) = z^7 - 32z^2$ trovarne le radici in $\mathbb{C}$ e fattorizzarlo in $\mathbb{R}$.
(2) Dette z_1, z_2, z_3 le radici di P non nulle con $\mathrm{Im}(z_i) \geq 0$ $i = 1, 2, 3$, scrivere in forma esponenziale il numero complesso $w = z_1 z_2 z_3$.

Soluzione. Si vede subito che si può scomporre $P(z) = z^2(z^5 - 32)$ per cui le radici di P sono 6: la prima radice è $w_0 = 0$ che ha molteplicità 2, le altre 5 radici sono le radici quinte del numero 32. Dato che $32 = 2^8 e^{i2\pi}$ si ottiene subito che

$$w_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{5}}, w_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{5}}, w_3 = 2e^{i2\pi} = 2, w_4 = 2e^{i\frac{6\pi}{5}}, w_5 = 2e^{i\frac{8\pi}{5}}$$

e le radici sopra coincidono anche con i vertici di un pentagono iscritto nella circonferenza di raggio 2 con un vertice coincidente con il punto $(2, 0)$. Disegnandole sulla circonferenza si deduce che le radici sopra con parte immaginaria non negativa sono

$$w_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{5}} = z_1, w_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{5}} = z_2, w_3 = 2e^{i\pi} = 2 = z_3,$$

inoltre risulta $w_4 = \overline{w_2}$ e $w_5 = \overline{w_1}$.

Il numero complesso $w = z_1 z_2 z_3$ è quindi uguale a

$$w = 2e^{i\frac{2\pi}{5}} 2e^{i\frac{4\pi}{5}} 2e^{i2\pi} = 8e^{i\frac{6\pi}{5}}.$$

Per quanto riguarda la fattorizzazione di P, essendo un polinomio a coefficienti reali, è noto che ha radici puramente reali oppure se ha una radice complessa non reale ha anche la sua coniugata; inoltre si può scrivere come prodotto di polinomi a coefficienti reali, ognuno dei quali di grado minore uguale a 2 (a seconda che la radice sia reale o meno) elevato alla molteplicità della radice. La stessa cosa si può ottenere partendo dalla fattorizzazione di P su $\mathbb{C}$ e raggruppando i fattori con radici coniugate.

$$\begin{aligned}
P(z) &= z^2(z - w_1)(z - w_5)(z - w_2)(z - w_4)(z - w_3) \\
&= z^2((z - \mathrm{Re}(w_1))^2 + (\mathrm{Im}(w_1))^2)((z - \mathrm{Re}(w_2))^2 + (\mathrm{Im}(w_2))^2)(z - 2) = \\
z^2(z-2)&\Big((z - 2\cos(\frac{2\pi}{5}))^2 + (2\sin(\frac{2\pi}{5}))^2\Big)\Big((z - 2\cos(\frac{4\pi}{5}))^2 + (2\sin(\frac{4\pi}{5}))^2\Big) \\
&= z^2(z-2)\Big(z^2 - 4\cos(\frac{2\pi}{5})z + 4\Big)\Big(z^2 - 4\cos(\frac{4\pi}{5})z + 4\Big) = P(z).
\end{aligned}$$

Si noti che facendo la divisione $z^5 - 32 = (z - 2)(z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 8z + 16)$ ed uguagliando

$$(z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 8z + 16) = \Big(z^2 - 4\cos(\frac{2\pi}{5})z + 4\Big)\Big(z^2 - 4\cos(\frac{4\pi}{5})z + 4\Big)$$

si possono calcolare esplicitamente i valori $\cos(\frac{2\pi}{5})$, $\cos(\frac{4\pi}{5})$ che risultando uguali a $(\sqrt{5} - 1)/4, -(1 + \sqrt{5})/4$.

Esercizio 3. Determinare lo sviluppo al terzo ordine in $x = 0$ di

$$f(x) = \arctan(\sin^2(x)) - \sin^2(\arctan(x))$$

e calcolare al variare di $\alpha > 0$ esistenza e valore di $\lim_{x\to 0+} f(x)x^{-\alpha}$.
Studiare poi al variare di $y \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y^n f\Big(\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\Big).$$

Soluzione.

La prima parte è uguale a quella dell'esercizio del Tema X.

Passiamo ora allo studio della serie.

Dal conto precedente si ha che

$$f\Big(\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\Big) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} + o\big(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\big).$$

Si tratta quindi di una serie di potenze e si calcola

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} + o\big(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\big)} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{(\sqrt[n]{n})^2}}\sqrt[n]{1 + o(1))} = 1.$$

Dai teoremi noti si deduce che la serie in oggetto converge assolutamente per $|y| < 1$. Per $y = 1$ la serie diventa equivalente ad una serie armonica di esponente $2/3$ per cui diverge a $+\infty$. Per $y = -1$ la serie si compone di due termini

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n o\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\Big)$$

il primo converge per il criterio di Leibniz, per studiare il secondo termine si usa invece il fatto che il termine $o(1/n)$ si può specificare più in dettaglio usando uno sviluppo migliore per $f(x)$ in $x = 0$. Infatti la funzione f è una funzione pari per cui il suo sviluppo di ordine superiore è dato da

$$f(x) = \frac{2}{3}x^4 + \frac{D^6 f(0)}{6!}x^6 + o(x^7)$$

e quindi

$$o\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\Big) = \frac{D^6 f(0)}{6!}\frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{\sqrt[6]{n^7}}\Big)$$

Da questo deriva che il secondo termine della serie si spezza ulteriormente in un pezzo che converge per Leibniz (qualunque sia il valore di $D^6 f(0)$) ed un pezzo che converge assolutamente per confronto con la serie armonica di esponente $7/6$. Concludendo la serie converge solo per $-1 \leq y < 1$.