Compito di Ist. Mat., Seconda parte, Tema XY

9 luglio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1.

a) Calcolare le radici terze di $z = -2$ scrivendole sia in forma algebrica, sia in forma trigonometrica.

b) Sia $p(z)$ il polinomio $z^5 + 3z^3 + 2z^2 + 6$. Sapendo che è diviso da $z^3 + 2$, calcolare tutte le radici, scrivendole sia in forma algebrica, sia in forma trigonometrica o esponenziale.

c) Riguardo alle radici del polinomo del punto precedente, quale radice ha la parte immaginaria minore?

Soluzione.

a) Il numero complesso $z = -2$ può essere scritto in forma esponenziale come $z = 2e^{-\pi i}$ e dunque le sue radici terze sono $z_1 = \sqrt[3]{2}e^{-\pi i} = -\sqrt[3]{2}$, $z_2 = \sqrt[3]{2}e^{-\pi i/3} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2})$, $z_3 = \sqrt[3]{2}e^{\pi i/3} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2})$.

b) Il polinomio si fattorizza come $p(z) = (z^3 + 2)(z^2 + 3)$ e le sue radici sono le radici di uno dei suoi fattori. Quindi le radici sono radici terze di -2, trovate nel punto precedente, $z_1 = \sqrt[3]{2}e^{-\pi i} = -\sqrt[3]{2}$, $z_2 = \sqrt[3]{2}e^{-\pi i/3} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2})$, $z_3 = \sqrt[3]{2}e^{\pi i/3} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2})$, oppure radici quadrate di -3, ovvero $z_4 = i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{\pi i/2}$ e $z_5 = -i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{-\pi i/2}$.

c) Le parti immaginarie sono rispettivamente $\mathrm{Im}(z_1) = 0$, $\mathrm{Im}(z_2) = -\sqrt[3]{2}\sqrt{3}/2$, $\mathrm{Im}(z_3) = \sqrt[3]{2}\sqrt{3}/2$, $\mathrm{Im}(z_4) = \sqrt{3}$, $\mathrm{Im}(z_5) = -\sqrt{3}$. Abbiamo che z_1, z_3, z_4 hanno parti immaginarie maggiori o uguali a 0. Inoltre $\sqrt[3]{2}/2 < 1$. Quindi la radice con parte immaginaria più piccola è z_5.

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Esercizio 2.

Si consideri al variare di $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$f(x, y, z, w) = (x + y + 2tw, -x + y + z + 4w, ty - z)$$

a) Scrivere la matrice associata ad f e calcolarne il rango al variare di t.
b) Calcolare la dimensione dell'immagine e del nucleo di f per $t = -4, -3, -2, -1$,0, 1,2, 3,4,5.
c) Per $t = 0$ e per $t = -2$ trovare una base dell'immagine di f.
d) Dire per quali valori di t il vettore $v = (3, 1, -2, 1)$ appartiene al nucleo di f.

Soluzione.

a) La matrice associata all'applicazione f è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2t \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & t & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La prima e la terza colonna della matrice sono linearmente indipendenti, quindi il rango è sempre almeno 2. Inoltre il determinante del minore 3×3 con le prime tre colonne è $-t - 2$ e il determinante del minore 3×3 con prima, terza e quarta colonna è $-2t - 4$. Dunque per $t \neq -2$ l'applicazione ha rango 3 e per $t = -2$ ha rango 2.

b) Per $t = -2$ l'applicazione ha rango 2 e quindi questa è la dimensione dell'immagine. Dunque la dimensione del nucleo è $4 - 2 = 2$. Per tutti gli altri valori di t l'applicazione ha rango (e quindi dimensione dell'immagine) 3 e dunque la dimensione del nucleo è $4 - 3 = 1$.

c) Per $t = 0$ l'applicazione lineare ha rango 3. Dunque una base della sua immagine è data ad esempio dalla base standard di $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Per $t = 2$ l'applicazione ha rango 2 e la sua immagine è generata da due vettori, ad esempio da $w_1 = (1, -1, 0)$ e $w_2 = (0, 1, -1)$, che sono la prima e terza colonna della matrice associata ad f.

d) Possiamo calcolare $f(v) = (4 + 2t, 0, t + 2)$. Dunque $v \in \ker f$ se e solo se $f(v) = 0$ ovvero se e solo se $2t + 4 = t + 2 = 0$, ovvero se e solo se $t = -2$.

Esercizio 3. Data $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, definita per $x \in \mathbb{R}$

(1) determinarne massimi e minimi locali/assoluti, asintoti e zone di convessità;

(2) fare la stessa analisi per $g(x) = |f(x)|$.

Soluzione. (1) La funzione è derivabile infinite volte e vale

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

La funzione è quindi convessa su $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e concava sui rimanenti due intervalli. f è crescente su $[0,+\infty)$ e decrescente su $(-\infty, 0]$ con un minimo (assoluto) in $x = 0$ di valore -1. Si ha anche $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. Se ne deduce che l'asse $y = 1$ è asintoto orizzontale a $\pm\infty$ e che 1 è anche l'estremo superiore della funzione.

(2) La funzione g coincide con $f(x)$ quando $f(x) \geq 0$ e con $-f(x)$ quando $f(x) < 0$. Rimane quindi da trovare l'insieme dove $f(x) \geq 0$. Vale

$$f(x) \geq 0 \iff x \geq 1 \text{ oppure } x \leq -1.$$

Il grafico di g può essere ottenuto da quello di f ribaltandone rispetto all'asse x la parte di grafico con $x \in (-1,1)$. g non è derivabile nei punti $-1, 1$ ma lo è infinite volte su $R \setminus \{-1,1\}$ e le derivate possono essere calcolate facilmente da quelle di f. Vale

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \; x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty), \quad f'(x) = -\frac{4x}{(x^2+1)^2} \; x \in (-1,1).$$

$$f''(x) = \frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^3} \; x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty), f''(x) = -\frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} \; x \in (-1,1).$$

La funzione è quindi concava sugli intervalli $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(-\infty,-1)$ e $(1,+\infty)$ e convessa sugli intervalli rimanenti. g è crescente su $[-1,0] \cup [1,+\infty)$ e decrescente su $(-\infty,-1] \cup [0,1]$ con un massimo (assoluto) in $x = 0$ di valore 1. Si ha ancora $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 1$. Se ne deduce che l'asse $y = 1$ è asintoto orizzontale a $\pm\infty$. Poichè $g \geq 0$ il minimo assoluto di g è raggiunto quando $g(x) = 0$, ossia nei punti $-1, 1$, e vale 0.

Esercizio 4. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y'(x) = -\frac{2x}{1+x^2}y(x) + \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$
Stabilire poi se la soluzione tale che $y(0) = 3$ è una funzione limitata su $\mathbb{R}$ o meno.
Soluzione. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine:
$$y'(x) = -\frac{2x}{1+x^2}y(x) + \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$
La soluzione v dell'eq. omogenea associata è
$$-\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = -\ln(1+x^2) + c = \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + c \Rightarrow v(x) = ce^{\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)} = c\frac{1}{1+x^2}.$$
Rimane poi da fare l'integrale
$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{-1}}\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \arctan(x) + c$$
e si ottiene che
$$y(x) = \frac{1}{1+x^2}(\arctan(x) + c) = \frac{\arctan(x) + c}{1+x^2}.$$
La soluzione tale che $y(0) = 3$ è quella con $c = 3$, ossia
$$y(x) = \frac{\arctan(x) + 3}{1+x^2}.$$
Si maggiora facilmente come
$$|y(x)| = \frac{|\arctan(x) + 3|}{1+x^2} \leq \frac{\frac{\pi}{2} + 3}{1+x^2} \leq \frac{\pi}{2} + 3.$$
In particolare y è una funzione limitata su $\mathbb{R}$.